



KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ

Robotlar için Matematik Temelleri

Vektörler

Yrd. Doç. Dr. A. Burak İNNER

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
<http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr>

VEKTÖR UZAYLARI

∞ Vektör Uzayları (Vector Spaces)

Boş olmayan bir V kümesi verilmiş olsun. V kümesinde $\forall (x,y) \in V \times V$ için $T(x,y) = x + y$ ile tanımlı $T: V \times V \rightarrow V$ fonksiyonu (toplama işlemi) ve R gerçel sayılar cismi olmak üzere, $\forall (r,x) \in R \times V$ için $S(r, x) = rx$ ile tanımlı $S: R \times V \rightarrow V$ fonksiyonu (skalerle çarpma işlemi) verilmiş olsun. Aşağıdaki aksiyomlar gerçekleşiyorsa V kümesine R gerçel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı ya da gerçel vektör uzayı denir ve $V(R)$ ile gösterilir.

1. $(V, +)$ sistemi değişmeli gruptur.

2. a) $\forall r \in R$ ve $\forall x, y \in V$ için $r(x + y) = rx + ry$

b) $\forall r, s \in R$ ve $\forall x \in V$ için $(r + s)x = rx + sx$

c) $\forall r, s \in R$ ve $\forall x \in V$ için $r(sx) = (rs)x$

d) $1 \in R$ ve $\forall x \in V$ için $1x = x$ dir.

$V(R)$ vektör uzayında V kümesinin elemanlarına vektör, R kümesinin elemanlarına da skaler denir.

VEKTÖR UZAYLARI

UYARI-1: Yukarıdaki vektör uzayı tanımında gerçel sayı cismi yerine, karmaşık sayı cismi de alınabilir. Böylece elde edilen vektör uzayına **karmaşık vektör uzayı** denir. Bu bölümde gerçel vektör uzaylarından başka vektör uzaylarını incelemeyeceğimiz için **gerçel vektör uzayı** ifadesi yerine **vektör uzayı** ifadesini kullanacağız.

UYARI-2: $R^n = R \times R \times \dots \times R = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}$ kümesi,

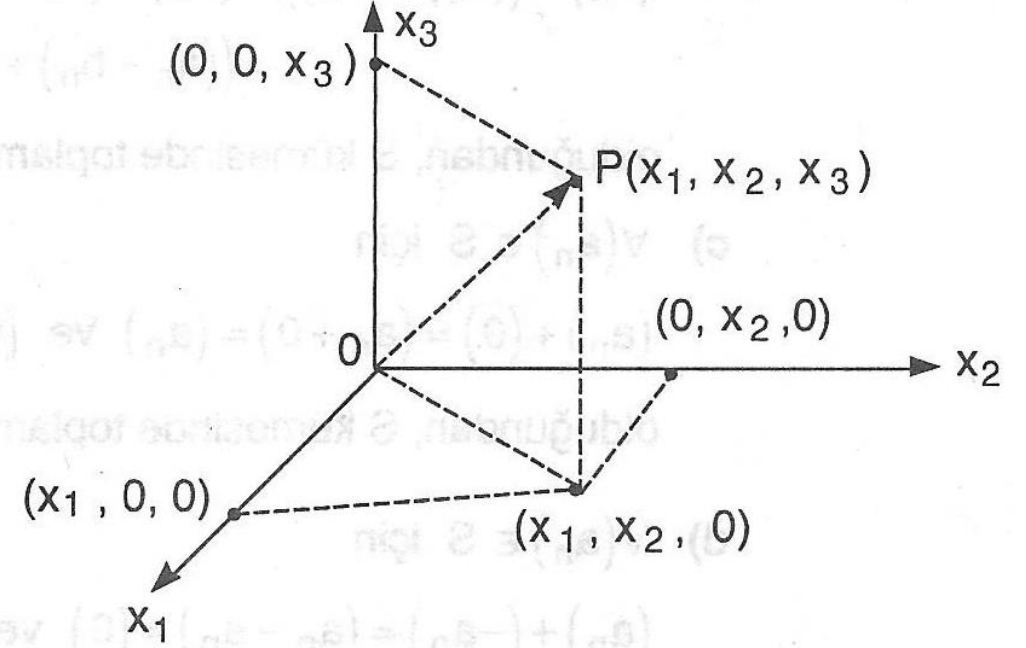
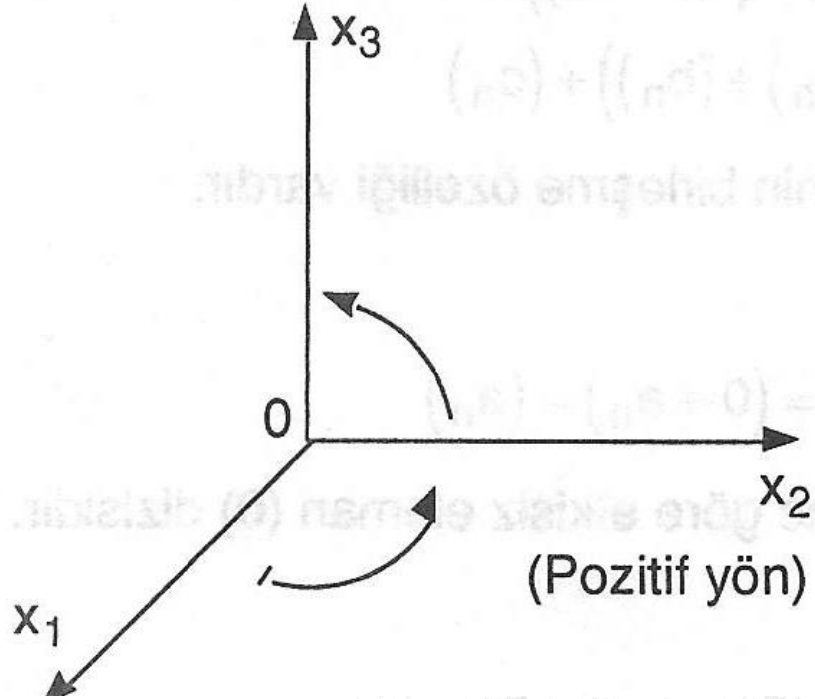
i) $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ toplama

ii) $r \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n)$ skalerle çarpma

işlemlerine göre R de bir vektör uzayıdır. Özel olarak R^2 ile düzlem, R^3 ile üç boyutlu uzay gösterilir. Bu nedenle düzlemdeki bir vektör (x_1, x_2) , üç boyutlu uzaydaki bir vektör (x_1, x_2, x_3) olarak alınır.

VEKTÖR UZAYLARI

∞ Dik koordinat sisteminde (x_1, x_2, x_3) vektörünün yazımı;



$(x_1, 0, 0)$ noktasından $(0x_2, 0x_3)$ düzlemine paralel bir düzlem, $(0, x_2, 0)$ noktasından $(0x_1, 0x_3)$ düzlemine paralel bir düzlem, $(0, 0, x_3)$ noktasından $(0x_1, 0x_2)$ düzlemine paralel bir düzlem çizilir. Bu üç düzlemin arakesiti (x_1, x_2, x_3) üçlüsüne karşılık gelen noktadır. Bundan böyle (x_1, x_2, x_3) üçlüsüne karşılık gelen nokta yerine kısaca (x_1, x_2, x_3) noktası diyeceğiz.

VEKTÖR UZAYLARI

∞ Alt vektör uzayı (Subvector spaces):

V bir vektör uzayı ve $A \subset V$, $A \neq \emptyset$ olsun. A kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı ise yani;

$\forall x, y \in A$ ve $\forall r \in R$ için

i) $x + y \in A$

ii) $rx \in A$ oluyorsa A ya, V nin bir altuzayı denir.

VEKTÖR UZAYLARI

↻ **Örnek:**

$A = \{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \wedge x_1 - 3x_2 = 0\}$ kümesinin \mathbb{R}^2 nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

VEKTÖR UZAYLARI

∞ Çözüm:

$$1) \quad (x_1, x_2) \in A \Rightarrow x_1 - 3x_2 = 0$$

$$(y_1, y_2) \in A \Rightarrow y_1 - 3y_2 = 0$$

$$(x_1 + y_1) - 3(x_2 + y_2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in A$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \in A \text{ olduğundan}$$

A kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

VEKTÖR UZAYLARI

$$2) \quad (x_1, x_2) \in A \quad \Rightarrow \quad x_1 - 3x_2 = 0$$

$$\Rightarrow k(x_1 - 3x_2) = 0$$

$$\Rightarrow kx_1 - 3kx_2 = 0$$

$$\Rightarrow (k \cdot x_1, kx_2) \in A$$

$$\Rightarrow k(x_1, x_2) \in A \quad \text{olduğundan}$$

A kümesi skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır. A kümesi \mathbb{R}^2 nin bir alt uzayıdır.

VEKTÖR UZAYLARI

∞ Vektörlerin doğrusal (lineer) birleşimi:

V bir vektör uzayı, $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$ ve

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n \in R$ olmak üzere,

$r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 + \dots + r_nv_n \in V$ vektörüne $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ vektörlerinin **doğrusal (lineer) bileşimi** denir.

Örnek: $(2, -3)$ ve $(-1, 4)$ vektörlerinin tüm doğrusal bileşimlerini yazınız.

Çözüm: $r_1, r_2 \in R$ olmak üzere bu iki vektörün tüm doğrusal bileşimleri

$$r_1(2, -3) + r_2(-1, 4) = (2r_1, -3r_1) + (-r_2, 4r_2)$$

$$= (2r_1 - r_2, -3r_1 + 4r_2) \text{ vektörüdür.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: $(5, -7)$ vektörünü, $(-2, 1)$ ve $(-1, 5)$ vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak yazınız.

Çözüm:

$$r_1(-2, 1) + r_2(-1, 5) = (5, -7)$$

$$(-2r_1, r_1) + (-r_2, 5r_2) = (5, -7)$$

$$(-2r_1 - r_2, r_1 + 5r_2) = (5, -7)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2r_1 - r_2 = 5 \\ r_1 + 5r_2 = -7 \end{array} \right\} \text{ sisteminden } \begin{array}{l} r_1 = -2 \\ r_2 = -1 \end{array} \text{ bulunur. Buradan}$$

$$(5, -7) = -2(-2, 1) - (-1, 5) \text{ yazılır.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

⚠ UYARI !!!

$e_1 = i = (1, 0)$, $e_2 = j = (0, 1)$ vektörleri \mathbb{R}^2 de

$e_1 = i = (1, 0, 0)$, $e_2 = j = (0, 1, 0)$, $e_3 = k = (0, 0, 1)$ vektörleri \mathbb{R}^3 de birim vektörleri gösterir.

\mathbb{R}^2 deki her (x_1, x_2) vektörü $(x_1, x_2) = x_1e_1 + x_2e_2$

$$(x_1, x_2) = x_1i + x_2j$$

\mathbb{R}^3 deki her (x_1, x_2, x_3) vektörü $(x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1i + x_2j + x_3k$$

biçiminde birim vektörlerin doğrusal bileşimi olarak yazılır.

VEKTÖR UZAYLARI

∞ Vektör uzayının üretici:

V bir vektör uzayı ve $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in V$ olsun.

$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ vektörlerinin doğrusal bileşimlerinin oluşturduğu

$U = \{r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 + \dots + r_nv_n : r_1, r_2, r_3, \dots, r_n \in \mathbb{R}\}$ kümesine $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ vektörlerinin ürettiği (gerdiği) küme, $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ kümesine de U kümesinin üretici denir. U, V nin bir alt uzayıdır.

VEKTÖR UZAYLARI

∞ Vektörlerin doğrusal bağımlı veya bağımsızlığı (linear dependent-linear independence):

V bir vektör uzayı ve $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ olsun

i) $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ sayılarından en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,

$r_1v_1 + r_2v_2 + \dots + r_nv_n = 0$ koşulu sağlanıyorsa v_1, v_2, \dots, v_n vektörleri **doğrusal bağımlıdır** denir.

ii) $r_1v_1 + r_2v_2 + \dots + r_nv_n = 0$ eşitliği yalnız $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$ için sağlanıyorsa v_1, v_2, \dots, v_n vektörleri **doğrusal bağımsızdır** denir.

VEKTÖR UZAYLARI

UYARI !!!

- ↻ R^n ' de alınan n tane vektörün bileşenlerinin alt alta yazılmasıyla elde edilen n boyutlu determinantın değeri sıfır ise vektörler lineer bağımlı, sıfırdan farklı ise lineer bağımsızdır.
- ↻ Lineer bağımsız vektörler uzayı gerer iken lineer bağımlı vektörler uzayı germezler
- ↻ n boyutlu uzayda $(n+1)$ tane vektör daima lineer bağımlıdır.

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: \mathbb{R}^2 de $(3, -4)$ ve $(2, 5)$ vektörleri **doğrusal bağımlı** mıdır?

Çözüm: i) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ve $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$$r_1(3, -4) + r_2(2, 5) = (0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3r_1 + 2r_2 = 0 \\ -4r_1 + 5r_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ sisteminden } r_1 = r_2 = 0 \text{ bulunur ki vektör doğrusal bağımsızdır .}$$

ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 23 \neq 0$ olduğundan doğrusal bağımsızdır .

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: \mathbb{R}^2 de $(1, 3)$ ve $(5, 15)$ vektörleri doğrusal bağımlı mıdır?

Çözüm: Vektörlerin bileşenlerinin oluşturduğu determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 15 - 15 = 0 \text{ olduğundan vektörler doğrusal bağımlıdır.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: $(1, a - 1, 0)$, $(b + 3, -2, 4)$, $(-3, b, 0)$ vektörlerinin \mathbb{R}^3 de doğrusal bağımlı olmaları için **a ile b** arasındaki bağıntı nedir?

Çözüm:
$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ b+3 & -2 & 4 \\ -3 & b & 0 \end{vmatrix} = 0$$
 determinantını 3. sütuna göre açalım.

$$-4 \begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -3 & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -3 & b \end{vmatrix} = 0$$

$b + 3a - 3 = 0$ dan $3a + b = 3$ bulunur.

VEKTÖR UZAYLARI

∞ Vektör uzayının tabanı ve boyutu (vector base-vector size):

V vektör uzayındaki v_1, v_2, \dots, v_n vektörleri V yi geriyor ve doğrusal bağımsız iseler

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesine V nin tabanı ve n sayısına da V nin boyutu denir.

$\{e_1, e_2\}$ kümesi R^2 nin, $\{e_1, e_2, e_3\}$ kümesi R^3 ün birer tabanıdır. Bu tabanlara R^2 ve R^3 ün temel tabanı denir.

VEKTÖR UZAYLARI

UYARI !!!

- 1)** R^n 'de lineer bağımsız n tane vektör daima uzayı gerer. Bu nedenle R^n 'de lineer bağımsız n tane vektörün kümesi bu uzayın bir tabanıdır.
- 2)** Bir uzayın birden fazla tabanı olabilir ancak boyut kesinlikle tek bir reel sayıdır. $\text{boy}(R^n)=n$ dir.
- 3)** Vektör sayısı boyut sayısından fazla ise vektörler lineer bağımlıdır.

VEKTÖR UZAYLARI

∞ LINEER DÖNÜŞÜMLER (LINEAR TRANSFORMATION)

V_1, V_2 birer vektör uzayı ve $f: V_1 \rightarrow V_2$ bir fonksiyon olsun.

i) $\forall x, y \in V_1$ için $f(x + y) = f(x) + f(y)$

ii) $\forall r \in \mathbb{R}$ ve $\forall x \in V_1$ için $f(rx) = rf(x)$ koşulları sağlanıyorsa f ye V_1 den V_2 ye bir doğrusal dönüşüm denir.

Örnek: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1, 4x_2)$ bir doğrusal dönüşüm müdür?

VEKTÖR UZAYLARI

Çözüm:

i) $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \wedge y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$f(x + y) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$= (2(x_1 + y_1), 4(x_2 + y_2))$$

$$= (2x_1 + 2y_1, 4x_2 + 4y_2)$$

$$= (2x_1 + 4x_2) + (2y_1 + 4y_2)$$

$$= f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2)$$

$$= f(x) + f(y)$$

ii) $f(rx) = f(rx_1, rx_2) = (2rx_1, 4rx_2) = r(2x_1, 4x_2)$

$$= rf(x_1, x_2) = rf(x) \text{ olduğundan } f \text{ doğrusal dönüşümdür.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

∞ LINEER DÖNÜŞÜMLERİN MATRİS GÖSTERİMİ

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ doğrusal dönüşümünde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n$ vektörünün f doğrusal dönüşümü altında görüntüsü

$$f(x) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) \text{ dir.}$$

$$f(e_1) = f(1, 0, 0, \dots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0, \dots, 0) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$$

⋮

$$f(e_n) = f(0, 0, 0, \dots, 1) = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) \text{ olsun}$$

$f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ vektörlerini sütun vektörleri olarak alalım ve $f(x)$ i yeniden yazalım.

ÖRNEK

VEKTÖR UZAYLARI

$$f(x) = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

olur ki buradaki

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisine **f doğrusal dönüşümünün matrisi** denir.

VEKTÖR UZAYLARI

UYARI !!!

R^n den R^m ye tanımlı f lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $m \times n$ boyutundadır.

Örnek: $f : R^2 \rightarrow R^3$

$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, -4x_2, -2x_1 + x_2)$ dönüşümüne karşılık gelen matrisi yazınız.

Çözüm: f dönüşümünün matrisi 3×2 türündedir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

1.Öteleme Dönüşümü:

$f:R^2 \rightarrow R^2$, $f(x,y)=(x+a,y+b)$ lineer dönüşümüne öteleme denir. Yani (x,y) vektörünün (a,b) vektörü kadar ötelenmesidir. Öteleme dönüşümü uzunlukları, açıları ve alanları değiştirmez.

Örnek: $(2,-7)$ vektörünün $(1,3)$ vektörü kadar ötelenmesi sonucu oluşan vektörü yazın.

Çözüm: Tanıma göre ötelenmiş hali;

$$(2+1,-7+3)=(3,-4) \text{ dir.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2, y - 3)$ ötelemesinin tersini bulunuz.

Çözüm: $x + 2 = X$, $y - 3 = Y$ den $x = X - 2$, $y = Y + 3$ olur.

$f^{-1}(X, Y) = (X - 2, Y + 3)$ bulunur.

Örnek: $f(x, y) = (x - 2, y + 3)$, $g(x, y) = (x + 1, y + 2)$ ötemeleri için $f \circ f$ ve $f \circ g$ ötelemelerini bulunuz.

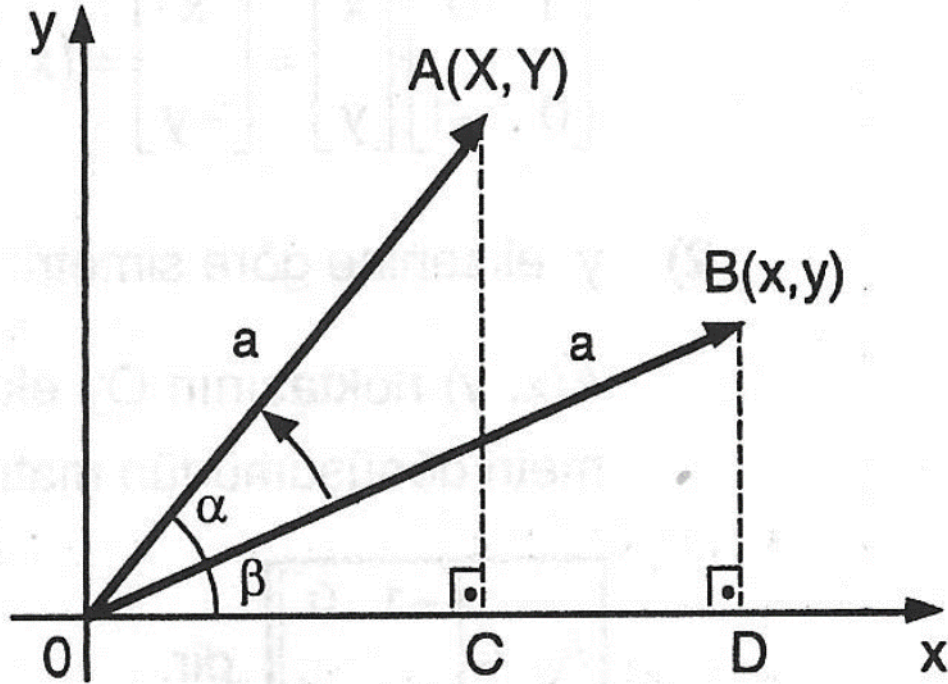
Çözüm: $(f \circ f)(x, y) = f[f(x, y)] = f(x - 2, y + 3) = (x - 2 - 2, y + 3 + 3) = (x - 4, y + 6)$

$(f \circ g)(x, y) = f[g(x, y)] = f(x + 1, y + 2) = (x + 1 - 2, y + 2 + 3) = (x - 1, y + 5)$ bulunur.

VEKTÖR UZAYLARI

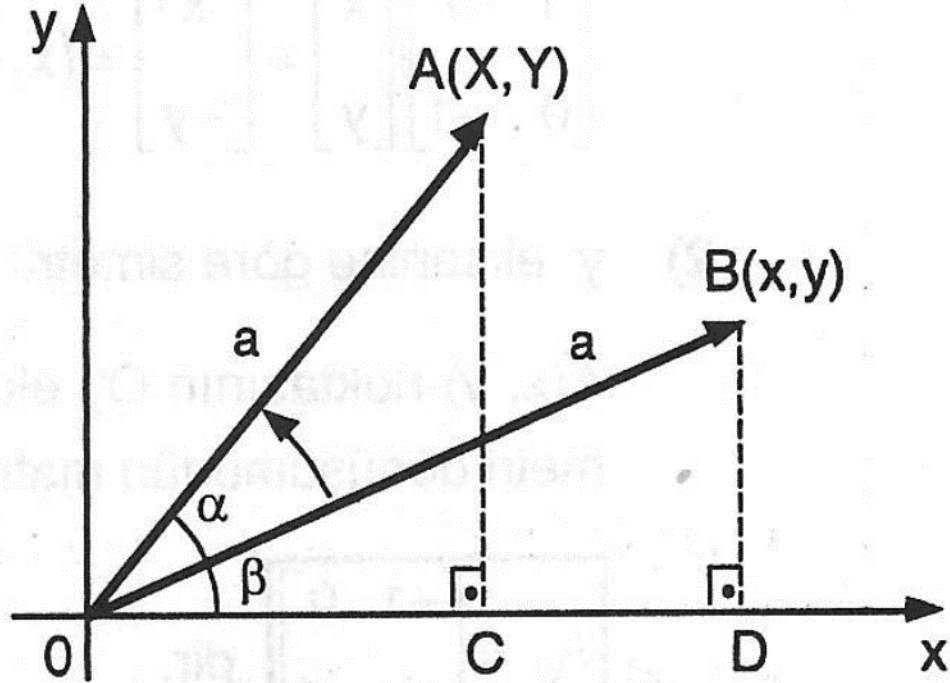
2. Dönme Dönüşümü:

$K' = A \cdot K$ dönüşümünde $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ve $a^2 + b^2 = 1$ ise bu dönüşüme **dönme dönüşümü** denir.



Dönme açısı $0 \leq \alpha < 2\pi$ olan başlangıç noktası etrafındaki pozitif yöndeki bir dönmede B(x,y) noktasının görüntüsü A(X,Y) ise;

VEKTÖR UZAYLARI



$|OA| = |OB| = a$ olsun

$\triangle OAC$ de: $\cos(\alpha + \beta) = \frac{|OC|}{a}$

$$X = |OC| = a \cdot \cos(\alpha + \beta) \quad (1)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{|AC|}{a}$$

$$Y = |AC| = a \cdot \sin(\alpha + \beta) \quad (2) \text{ dir.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

$$X = a \cos \alpha \cdot \cos \beta - a \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (1)$$

$$Y = a \sin \alpha \cdot \cos \beta + a \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (2) \text{ olur.}$$

Öte yandan \widehat{OBD} de: $\cos \beta = \frac{|OD|}{a} \quad \wedge \quad \sin \beta = \frac{|BD|}{a}$

$$x = |OD| = a \cos \beta \quad (3) \quad y = |BD| = a \sin \beta \quad (4) \text{ elde edilir.}$$

(3) ve (4), (1) ve (2) de yerine konulursa,

$$\begin{aligned} X &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ Y &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \quad \text{ya da} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

Buradaki $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ matrisi dönme matrisidir.

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: Düzlemde $\alpha = \frac{\pi}{3}$ radyanlık pozitif yöndeki dönmenin matrisini ve $(-2, 4)$ noktasının görüntüsünü bulunuz.

Çözüm: Dönme matrisi $= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$(-2, 4)$ noktasının görüntüsü ise

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}+2 \end{bmatrix} \text{ veya } (-1-2\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}) \text{ dür.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: xy koordinat sistemine $P(1,2)$ veriliyor. Eksenler pozitif yönde 30° döndürüldüğünde oluşan yeni $x'y'$ koordinat sisteminde P noktasının koordinatları nedir?

Çözüm:

$$x' = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta$$

$$y' = -x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta$$

eşitliklerinde $\theta=30^\circ$ yazıldığında;

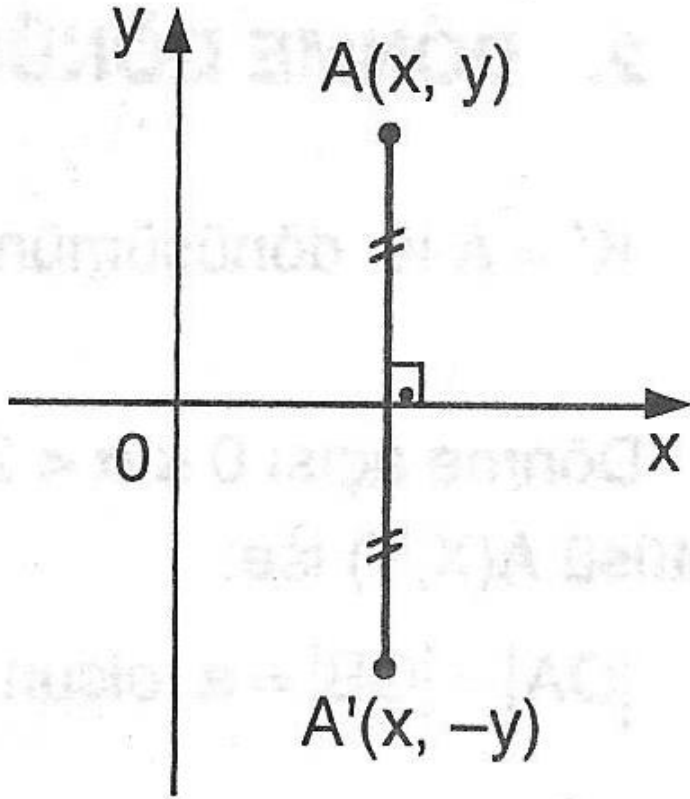
$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \quad \text{ve} \quad y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \quad \text{olur.}$$

$$x=1 \quad \text{ve} \quad y=2 \quad \text{için;} \quad x' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \quad \text{ve} \quad y' = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} \quad \text{bulunur.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

3. Simetri Dönüşümü:

a) X eksenine göre simetri;



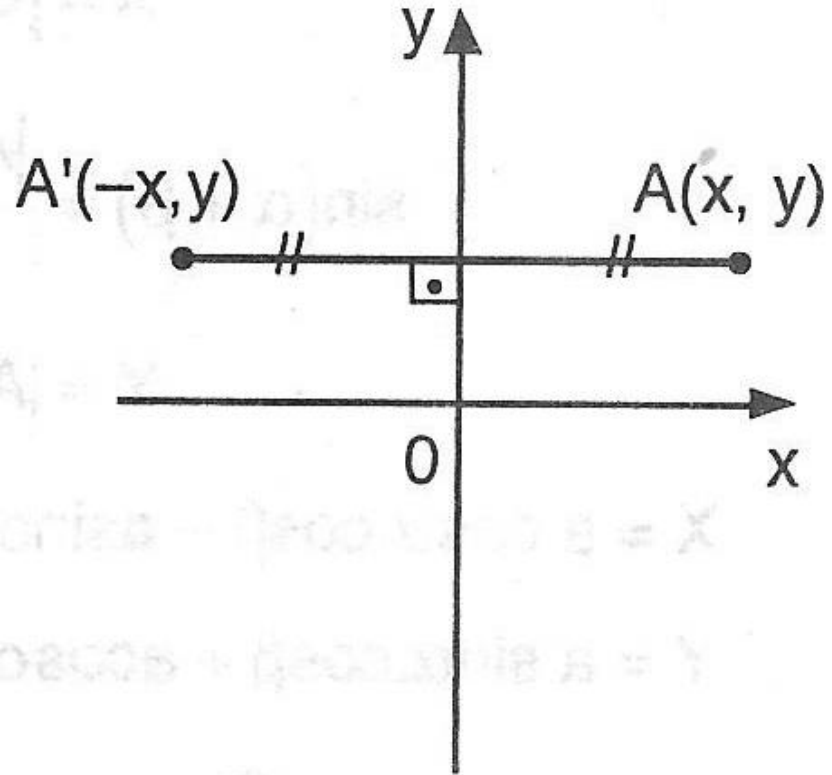
$A(x, y)$ noktasının Ox eksenine göre simetriği $A'(x, -y)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = (x, -y) \text{ olur.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

b) Y eksenine göre simetri;



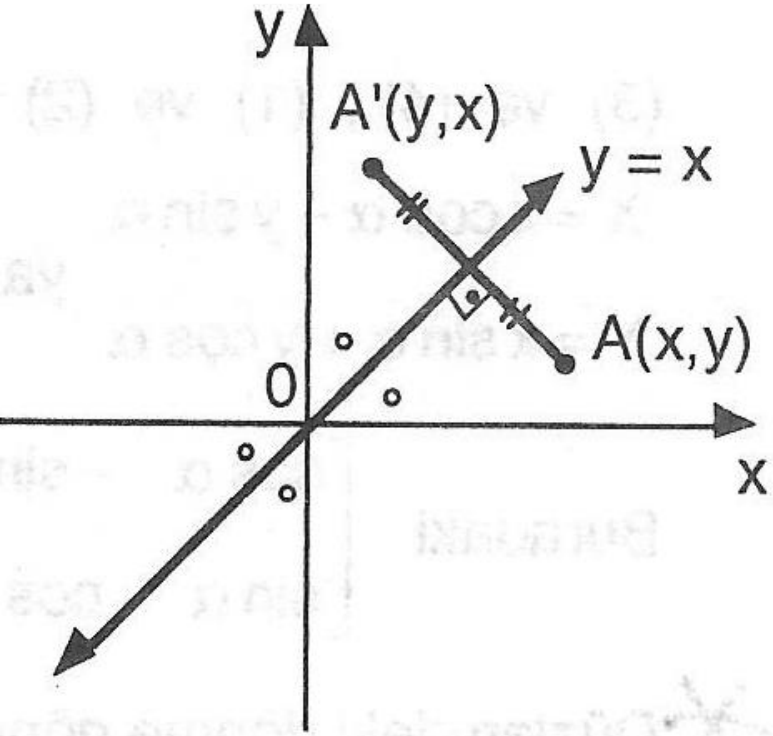
$A(x, y)$ noktasının Oy eksenine göre simetriği $A'(-x, y)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$A_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = (-x, y) \text{ olur.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

c) $y=x$ doğrusuna göre simetri;



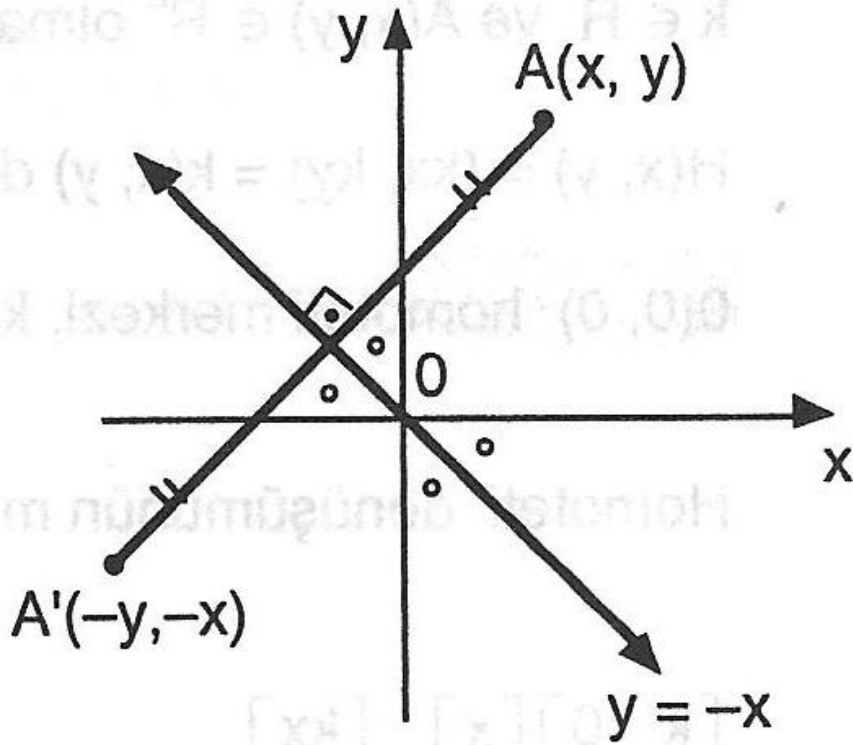
$A(x, y)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği $A'(y, x)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$A_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = (y, x) \text{ olur.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

d) $y = -x$ doğrusuna göre simetri;



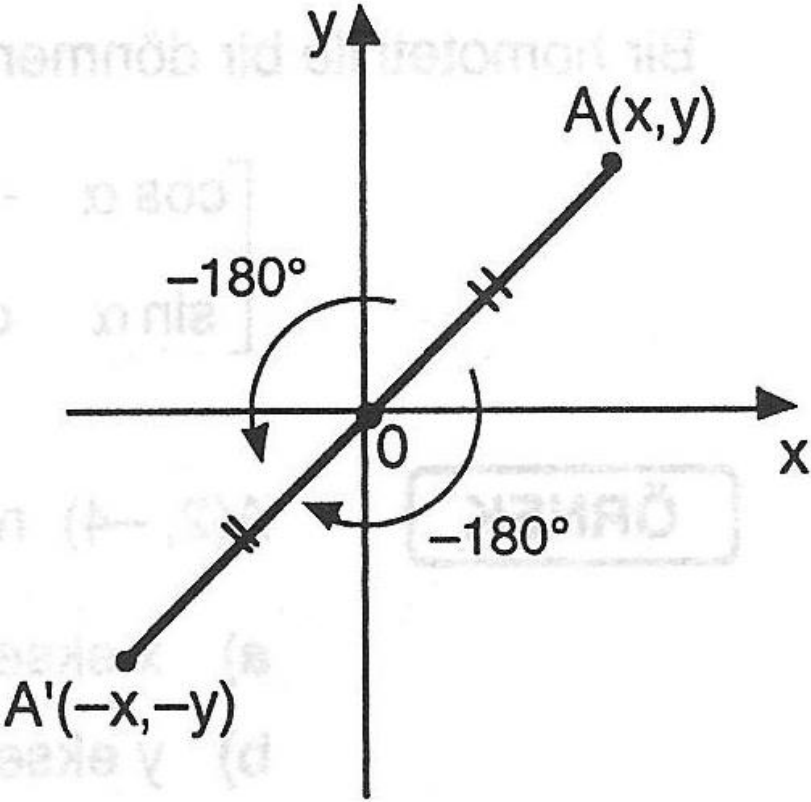
$A(x, y)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $A'(-y, -x)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$A_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} = (-y, -x) \text{ olur.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

e) Orijine göre simetri (180° ve -180° lik dönmeler);



$A(x, y)$ noktasının orijine göre simetriği $A'(-x, -y)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = (-x, -y) \text{ olur.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

4. Homoteti Dönüşümü:

$k \in \mathbb{R}$ ve $A(x, y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere,

$H(x, y) = (kx, ky) = k(x, y)$ dönüşümüne **homoteti** denir.

$O(0, 0)$ homoteti merkezi, k sayısı ise homoteti oranıdır.

Homoteti dönüşümünün matrisi $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ dir.

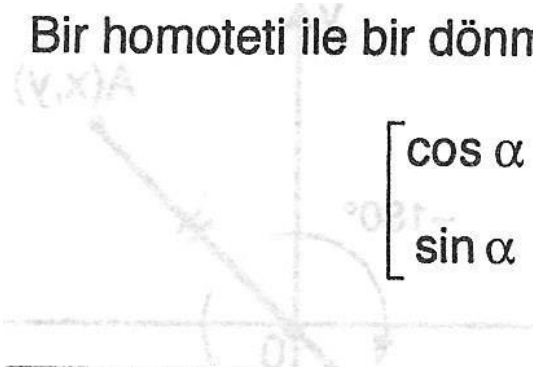
$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} = (kx, ky) = k \cdot (x, y) \text{ olur.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

5. Benzerlik Dönüşümü:

Bir homoteti ile bir dönmenin bileşkesine **benzerlik dönüşümü** denir. Yani benzerlik dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cos \alpha & -k \sin \alpha \\ k \sin \alpha & k \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ dir.}$$



benzerlik dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} k \cos \alpha & -k \sin \alpha \\ k \sin \alpha & k \cos \alpha \end{bmatrix}$$

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: $A(2, -4)$ noktasının,

- x eksenine göre
- y eksenine göre
- $y = x$ doğrusuna göre
- $y = -x$ doğrusuna göre
- Orijine göre simetriklerini,
- 90° döndürüldüğünde elde edilen
- 270° döndürüldüğünde elde edilen noktaları bulunuz.

VEKTÖR UZAYLARI

Çözüm:

$$\text{a) } A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = (2, 4)$$

$$\text{b) } A_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = (-2, -4)$$

$$\text{c) } A_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = (-4, 2)$$

$$\text{d) } A_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = (4, -2)$$

VEKTÖR UZAYLARI

e) $A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = (-2, 4)$

f) $A_{90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (4, 2)$

g) $A_{270} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = (-4, -2)$ bulunur.

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek:

$A(0, 0)$, $B(0, 3)$, $C(4, 3)$, $D(4, 0)$ olan dörtgenin $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dönüşüm matrisi altındaki görün-

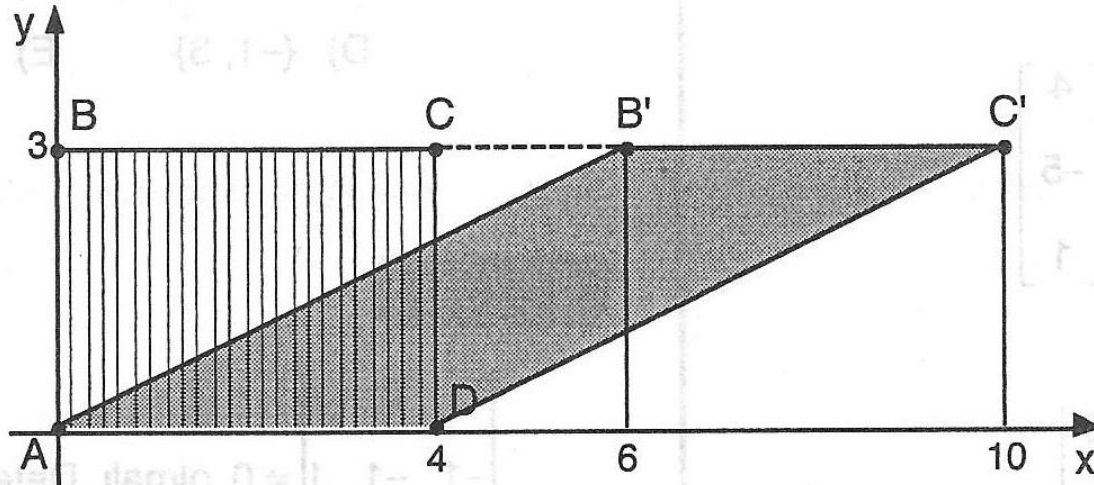
tüsünü bulunuz ve şeklini çiziniz.

Çözüm:

Noktaların tümüne dönüşüm matrisini aynı anda uygulayalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

A B C D A' B' C' D



VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ doğrusal dönüşümünün matrisi $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ dir. $2x - 3y + 1 = 0$ doğrusunun bu dönüşüm matrisi altındaki görüntüsü nedir?

Çözüm: Doğru üzerindeki her hangi bir (x, y) noktasının dönüşüm matrisindeki görüntüsü $[X, Y]$ olsun.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - y \\ 2x \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

Buradan $X = 3x - y$ ve $Y = 2x$ olur.

x ve y değerleri çekilirse

$$x = \frac{Y}{2} \quad \wedge \quad X = \frac{3Y}{2} - y$$

$$y = \frac{3Y - 2X}{2} \text{ bulunur.}$$

Doğru denklemine yerine konursa,

$$2 \cdot \frac{Y}{2} - 3 \cdot \frac{3Y - 2X}{2} + 1 = 0$$

$$2Y - 9Y + 6X + 2 = 0 \text{ dan}$$

$$6X - 7Y + 2 = 0 \text{ elde edilir.}$$

Teşekkürler.



Dersin Sonu

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
<http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr>