İsimsiz Not

Not defteri:	Günlük Notlar
Oluşturulma tari...	22-Nov-17 10:55 AM
Güncellenme ta...	22-Nov-17 11:09 AM

Bu işlemlerden,

Bir dönüşüm matrisini başka bir dönüşüm matrisiyle ileri yönlü bir çarpma işlemine tabi tutarsak, öteleme/dönme işleminin yeni yani hareket eden koordinat sistemine göre gerçekleştirildiği anlaşılır.

ÖRNEK 2.8

Daha önce örnek 2.3'de gerçekleştirilen ${}^{A}_{B}R$ işlemini göz önünde bulunduralım. Hatırlanacağı gibi Örnek 2.3'de (Şekil 2.10) verilen iki koordinat sisteminden {B} koordinat sisteminin {A} koordinat sistemine göre yönelimi,

$$ {}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

olarak bulunmuştu. Aynı sonucu ileri yönlü çarpma yöntemini kullanarak da bulabiliriz.

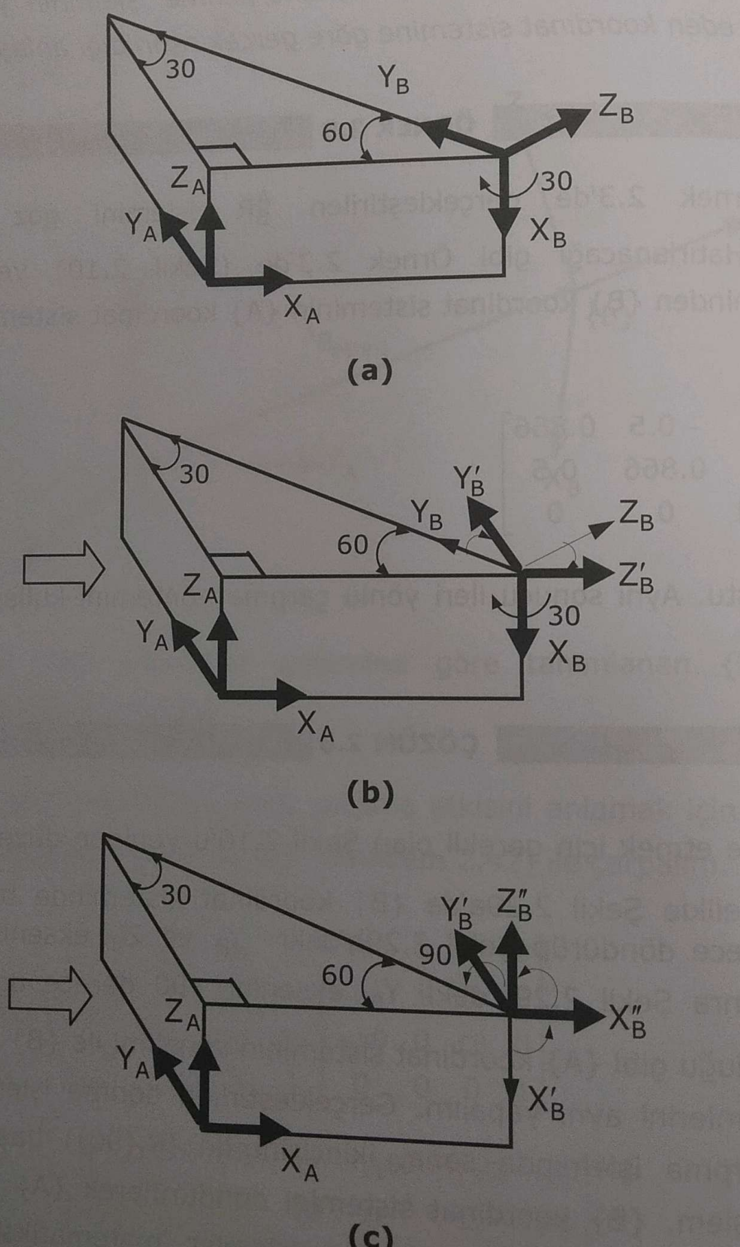
ÇÖZÜM 2.8

${}^{A}_{B}R$ matrisini elde etmek için gerekli olan Şekil 2.10'u yeniden düzenleyelim. Bunun için öncelikle Şekil 2.29a'da {B} koordinat sisteminde bulunan X eksenini -30 derece döndürüp Şekil 2.29b'deki Y'_B ve Z'_B eksenlerini elde edelim. Daha sonra Şekil 2.29b'deki Y'_B eksenini +90 derece döndürerek Şekil 2.29c'de olduğu gibi {A} koordinat sisteminin yönelimi ile {B} koordinat sisteminin yönelimlerini aynı yapalım. Gerçekleştirilen dönme işlemlerinden ilki ($R_X(-30)$) çarpma işleminde sona, ikincisini de ($R_Y(90)$) başa yazılır. Burada yapılan işlem, {B} koordinat sistemini döndürülerek {A} koordinat sistemini elde etmekten ibarettir. Yapılan işlemler matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$
{}^A_BR = R_Y(90)R_X(-30)
$$

$$
= \begin{bmatrix} c90 & 0 & s90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s90 & 0 & c90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(-30) & -s(-30) \\ 0 & s(-30) & c(-30) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 0.866 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.45)
$$



Şekil 2.29. Çözüm 2.8 için çizilmiş şekiller.

2.6. Dönüşüm Matrisl

Bu aşamada ise dönüş
${}^A_BT$ matrisini bir dönme
işlemine tabii tutalım.

$R_Y(\theta){}^A_BT = \begin{bmatrix} c\theta \\ 0 \\ -s \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} r_{11}c\theta + r_3 \\ r_{21} \\ -r_{11}s\theta + r \\ 0 \end{bmatrix}$

Çarpım sonucunda
çarpmadan önce
işlemlerden aşağıd

Bir dönüş
işlemine
koordinat

Örnek 2.8'deki

${}^A_BR$ matrisini e

Bunun için ör
eksenini 30 d
edelim. Daha
Şekil 2.30c'd
koordinat sis
işlemlerinden
sona yazılır.

$$
= \begin{bmatrix} -r_{11}s\theta + r_{31}c\theta & -r_{12}s\theta + r_{32}c\theta & -r_{13}s\theta + r_{33}c\theta & -p_x s\theta + p_z c\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)
$$

Çarpım sonucunda, denklem 2.46'daki $R_Y(\theta)^A_BT$ matrisinin ikinci satırı çarpmadan önce mevcut ^A_BT matrisindeki 2. satırla aynı çıkmıştır. Bu işlemlerden aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Bir dönüşüm matrisini başka bir dönüşüm matrisiyle önden çarpma işlemine tabi tutmak, öteleme/dönme işleminin sabit referans koordinat sistemine göre gerçekleştirildiği anlamına gelir.

ÖRNEK 2.9

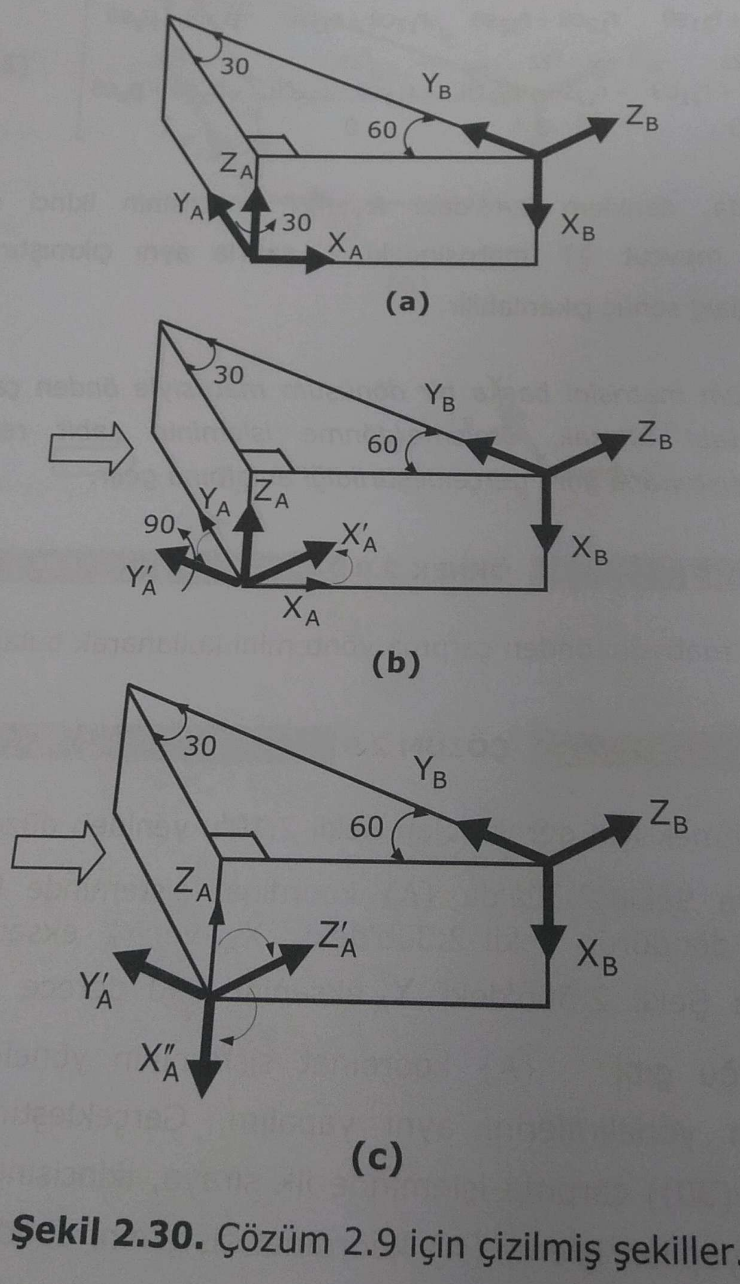
Örnek 2.8'deki ^A_BR matrisini önden çarpma yöntemini kullanarak bulalım.

ÇÖZÜM 2.9

^A_BR matrisini elde etmek için gerekli olan Şekil 2.10'u yeniden düzenleyelim. Bunun için öncelikle Şekil 2.30a'da {A} koordinat sisteminde bulunan Z eksenini 30 derece döndürüp Şekil 2.30b'deki X'_A ve Y'_A eksenlerini elde edelim. Daha sonra Şekil 2.30b'deki Y'_A eksenini +90 derece döndürerek Şekil 2.30c'de olduğu gibi {A} koordinat sisteminin yönelimi ile {B} koordinat sisteminin yönelimlerini aynı yapalım. Gerçekleştirilen dönme işlemlerinden ilki ($R_Z(30)$) çarpma işleminde ilk sıraya, ikincisini de ($R_Y(90)$) sona yazılır. Burada yapılan işlem, {A} koordinat sistemini döndürülerek {B} koordinat sistemi elde etmekten ibarettir. Yapılan işlemler matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$
{}^{A}_{B}R = R_Z(30)R_Y(90) = \begin{bmatrix} c30 & -s30 & 0 \\ s30 & c30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c90 & 0 & s90 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s90 & 0 & c90 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0.866 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.866 \\ 0 & 0.866 & 0.5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.47}
$$



Şekil 2.30. Çözüm 2.9 için çizilmiş şekiller.

2.6. Dönüşüm Matrislerinin Önden Çarpılması

Bu aşamada ise dönüşüm matrislerinin önden çarpma etkisini anlamak için ${}^{A}_{B}T$ matrisini bir dönme matrisi olan $R_Y(\theta)$ (denklem 2.42) ile önden çarpma işlemine tabii tutalım.

$$R_Y(\theta){}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11}c\theta + r_{31}s\theta & r_{12}c\theta + r_{32}s\theta & r_{13}c\theta + r_{33}s\theta & p_x c\theta + p_z s\theta \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ -r_{11}s\theta + r_{31}c\theta & -r_{12}s\theta + r_{32}c\theta & -r_{13}s\theta + r_{33}c\theta & -p_x s\theta + p_z c\theta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Çarpım sonucunda, denklem 2.46'daki $R_Y(\theta){}^{A}_{B}T$ matrisinin ikinci satırı çarpmadan önce mevcut ${}^{A}_{B}T$ matrisindeki 2. satırla aynı çıkmıştır. Bu işlemlerden aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

Bir dönüşüm matrisini başka bir dönüşüm matrisiyle önden çarpma işlemine tabi tutmak, öteleme/dönme işleminin sabit referans koordinat sistemine göre gerçekleştirildiği anlamına gelir.

ÖRNEK 2.9

Örnek 2.8'deki ${}^{A}_{B}R$ matrisini önden çarpma yöntemini kullanarak bulalım.

ÇÖZÜM 2.9

${}^{A}_{B}R$ matrisini elde etmek için gerekli olan Şekil 2.10'u yeniden düzenleyelim. Bunun için öncelikle Şekil 2.30a'da {A} koordinat sisteminde bulunan Z eksenini 30 derece döndürün Şekil 2.30b'deki X'_A ve Y'_A eksenlerini elde