KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ

Bilgisayar Mühendisliğinde Matematik Uygulamaları

11. Hafta

Yrd. Doç. Dr. A. Burak İNNER

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr

Doğrusal Programlama

- Doğrusal programlama, karar verici konumundaki kişilerin karar vermelerine yardımcı olmak amacıyla geliştirilmiş bir problem çözme yaklaşımıdır.

- Doğrusal programlama ifadesindeki "doğrusal" sıfatı, modelde kullanılan bütün matematiksel fonksiyonların lineer olduğunu, "programlama" kelimesi ise optimal çözümün bulunması için yapılacak faaliyetlerin akış sırasını, başka bir ifade ile sistematik bir planlama faaliyetini ifade eder.

- Matematik programlama modelleri arasında yer alan Lineer Programlama(LP) Kar maksimizasyonu ya da maliyet minimizasyonu gibi bir amaçla karşılaşıldığında, sınırlı üretim kaynaklarının en etkin biçimde dağıtılması konusunu inceleyen bir modeldir.

- Modelin ayırıcı özelliklerinden en önde geleni,; hem amaç fonksiyonunun hem de kısıtlatıcı koşuların doğrusal denklemlerle ifade edilmesidir.

Doğrusal Programlamanın Kullanılması:

- Doğrusal programlama, matematik biliminde, özellikle yöneylem araştırması uygulamalı dalında, doğrusal programlama problemleri bir doğrusal amaç fonksiyonun doğrusal eşitlikler ve eşitsizlikler kısıtlamaları ile optimizasyon yapılmasıdır.

- Bir optimizasyon modeli eğer sürekli değişkenlere ve tek bir doğrusal amaç fonksiyonuna sahipse ve tüm kısıtlamaları doğrusal eşitlik veya eşitsizliklerden oluşuyorsa, doğrusal(lineer) program olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, modelin tek amaçlı fonksiyonu ve tüm kısıtlamaları, süreklilik gösteren karar değişkenlerinin ağırlıklı toplamlarından oluşmalıdır.

- Doğrusal programlama işletmecilik alanlarında çok kapsamlı ve çok çeşitli sorunların çözülebilmesini sağlamaktadır.

- Bunlar sorunlar arasında;
- planlama,
- yol gösterme,
- zaman programlaması,
- iş ve işçi tahsis edilmesi gibi önemli sorunlar doğrusal programlama kullanılarak modellenebilmektedir.

Lineer Programlama Modelinin Tanımı ve Yapısı:

- LP modeli kullanılarak çözülebilen ve amacı karın maksimizasyonu ya da maliyetin minimizasyonu olan bir problemde, bir ya da daha çok denklem yer alır.
- Problem matematiksel yapısında ise hem amaç fonksiyon hem de kısıtlayıcı koşullar, doğrusal denklemlerle ifade edilmelidir.

Temel Kavramlar

- ***Çözüm***: Bir doğrusal programlama probleminin kısıtlayıcı fonksiyonlarının hepsini birden sağlayan karar değişkenlerinin (x_1, x_2, ..., x_n) oluşturduğu kümeye *çözüm* denir.

- ***Uygun çözüm***: Negatif olmama koşulunu sağlayan çözüme *uygun çözüm* denir.

- ***En iyi çözüm***: Amaç fonksiyonuna en iyi değeri (en küçük veya en büyük) sağlayan uygun çözüme *en iyi çözüm* denir.

Lineer Programlama: Genel bakış

- Karar amaçları karın maximizasyonunu veya karın minimizasyonunu içerir.
- Lineer programlama firmanın kararlarını temsil etmek için lineer cebirsel ilişkileri (verilen amaç ve kaynak kısıtlarını) kullanır.

Model Bileşenleri

- **Karar değişkenleri** – matematiksel semboller firmanın faaliyetinin seviyesini temsil eder.

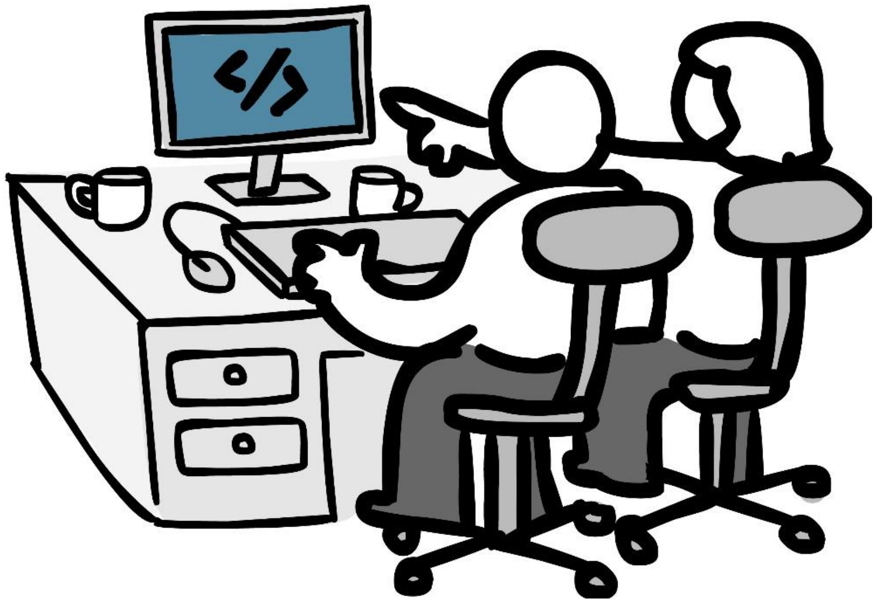
- **Amaç fonksiyonu** – firmanın amacını lineer matematiksel ilişki ile açıklama. Bu fonksiyon maksime ve minime etme olabilir.

- **Kısıtlar** – Karar değişkenlerinin sınırlamalarını içerir.

- **Parametreler** - amaç fonksiyonunda ve kısıtlarda kullanılan sayısal katsayılar ve sabitler.

Model Formulasyon adımlarının özeti

- Adım 1 : Karar değişkenlerini belirle
- Adım 2 : Amaç fonksiyonunu belirle
- Adım 3 : Kısıtları belirle



1. Doğrusallık:

- Modeldeki input ve output (girdi ve çıktı) ilişkilerinin doğrusal nitelikte olduğu, bir başka deyişle modelin amacı ve kısıtlayıcı koşullarını belirleyen fonksiyonların doğrusal denklemler olduğu varsayılır. Bu varsayımın doğuş nedenleri şunlardır:

  a) Modelde kullanılan input-output katsayıları sabittir ya da faktör girişi ile ürün çıkışı arasındaki bağıntı doğrusal niteliktedir,

  b) Kaynaklara ödenen ya da ürünlerden elde edilen fiyatlar sabit varsayılmaktadır.

2. Eşitsizlik:

- Üretim süreçleri tarafından kullanılan üretim faktörleri toplamının sıfıra eşit, büyük ya da küçük olma koşuludur.
- Bu ifade, tüm üretim kaynakları arzının kullanımının gerekmediği durumların da (atıl kapasite) söz konusu olabileceğini, ancak üretilen herhangi bir ürün miktarının sıfırdan büyük ya da eşit olması gerektiğini ortaya koyar.

3. Negatif Olmama Koşulu:

- Ekonomide negatif üretimden söz edilemeyeceği, yani negatif değerlerin olamayacağı gerçeğinden hareketle, üretim düzeyinin ya da karar değişkenlerinin pozitif veya sıfıra eşit olması gerekliliğinden ortaya çıkan varsayımdır.

4. Kaynakların Sınırlılığı ve Sonluluk:

- Üretim süreçlerinin, üretim faktörlerinin, alternatif faaliyet sayısının ve kaynak sınırlamalarının sonlu olduğu varsayımıdır.

5. Bölünebilirlik

- Üretim faktörlerinin ve ürünlerin bölünebilir yapıda olmaları, yani kesirli olabilecekleri varsayımıdır.

6. Belirlilik

- LP’de birim başına kar. Her faaliyet için gerekli faktör miktarı ve elde edilecek ürün miktarı gibi ekonomik değerlerin belirli ve sabit olduğu varsayılır.

7. Toplanabilirlik:

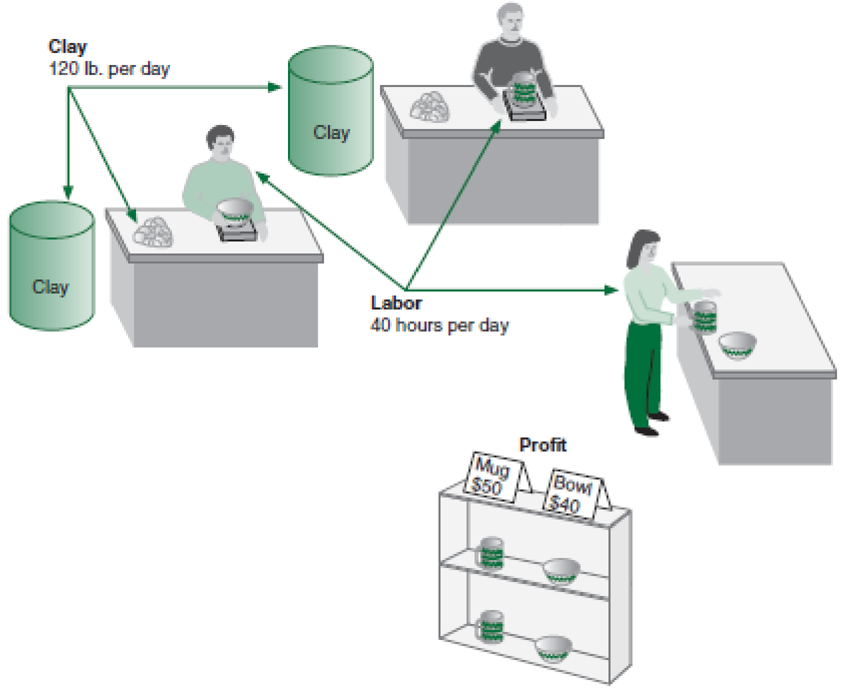
- Faaliyetlerin birbirlerini etkilemedikleri varsayımıdır.
- Yani tüm faaliyetlerden elde edilecek kazanç her bir faaliyetten ayrı ayrı elde edilecek kazançların toplamına eşittir (ya da maliyet amaçlı bir problemde toplam maliyet, her bir faaliyet için ayrı ayrı yapılan maliyetlerin toplamına eşittir).
- Oysa gerçekte, faaliyetlerden bir ya da daha çoğunda ortaya çıkabilecek arıza bir durum, öteki faaliyetleri de etkileyerek kazanç üzerinde olumlu ya da olumsuz etkiler yapabilecektir.

8. Tek Değerli Beklentiler

- **Tek Değerli Beklentiler:** Kaynak arzı, input-output katsayıları ve fiyatların kesin olarak bilindiği varsayılır.

LP Model Formülasyonu Maksimizasyon Örneği

	Kaynak İhtiyaçları		
Ürün	Çalışan (Saat/Adet)	Kil (Kg./Adet)	Kar (TL/Adet))
Kase	1	4	40
Kupa	2	3	50



Şekil 2.6 Çömlek Şirketi

- Veriler: 120 kg. kil, günde toplam 40 saatlik çalışma süresi.
- Karı maksimize etmek için ne kadar kupa ve kase üretmemiz gerekir?

Örnek

- Bir firma üç ayrı üretim faktörüne sahip olup, bu faktörlerle çeşitli ürünler üretmektedir. Beklenen karın azalması üzerine firma üst düzey yöneticileri üretim hattında bazı düzenlemeler yapma gereği duymuşlardır. Bu düzenlemelere göre kar getirmeyen bazı ürünler üretimeyecek, maksimum kar için gerekirse bir ya da birkaç ürün üretilecektir. Yapılan araştırmalar sonucu, iki ürünün (ürün A ve ürün B) üretilmesine karar verilmiştir. Elde edilen bilgilere göre (1) numaralı üretim faktörü 8 birimlik, (2) numaralı üretim faktörü 24 birimlik ve (3) numaralı üretim faktörü de 36 birimlik kapasiteye sahiptir. A ürününden bir birim üretmek için (1) numaralı üretim faktöründen 2 birim, (3) numaralı üretim faktöründen 6 birim kullanılacak (2) numaralı üretim faktöründen ise hiç kullanılmayacaktır. B ürününden bir birim üretmek için ise (1) numaralı üretim faktöründen hiç kullanılmayacak, (2) numaralı üretim faktöründen 4 birim ve (3) numaralı üretim faktöründen de 4 birim kullanılacaktır. A ürününün bir biriminin satışından 6 para birimi (pb), B ürününün satışından da 10 pb net kar sağlanacaktır.

- Probleme ait modeli kurmadan, önce bu verilerin bir tablo halinde düzenlenmesi ve daha sonra matematiksel ifadenin yazılması daha kolay olacaktır:

Birimler	A Ürünü, x_1	B Ürünü, x_2	Toplam Kapasite
Üretim Faktörü 1	2	0	8
Üretim Faktörü 2	0	4	24
Üretim Faktörü 3	6	4	36
Maksimize Kar	6	10	

- Tablonun son satırında ürünlerin (A ve B ürünlerinin) bir biriminin satışından elde edilecek net karlar yazılmıştır. A ürününden x_1 miktar B ürününden de x_2 miktar satılırsa firmanın elde edeceği toplam kar (Z amaç fonksiyonunu ifade etmek üzere) matematiksel olarak maksimize $Z = 6\ x_1 + 10\ x_2$ denklemi ile ifade edilebilir.

- Genel olarak, bir LP probleminde kar söz konusu ise amaç da doğal olarak karı maksimizasyon yapmak olacağından yukarıdaki ifade aynı zamanda amaç denklemidir, yani bu ifade LP notasyonuna uygun olarak, *Maksimize Z* = 6 x_1 +10 x_2 *Amaç denklemi* olarak yazılır.

- Tablonun birinci satırı yani (1) nolu üretim faktörü satırı incelenecek olursa toplam 4 birimlik kapasiteye sahip olan bu faktörün sadece A ürününün üretiminde kullanıldığı, B ürününün üretiminde hiç kullanılmadığı görülmektedir. O halde bu üretim faktörü kullanılarak en çok 4 birim A ürünü üretilebilecektir. Bu durum cebirsel olarak 2 $x_1 \leq 8$ eşitsizliği ile ifade edilir.

- Benzer düşünce ile tablodaki verilere dayanarak diğer üretim faktörlerinin kullanım ve ürettikleri ürünler açısından kısıtlayıcı şart denklemleri kurularak problemin bir LP modeli şeklindeki ifadesi aşağıdadır:
- Maksimize: $Z = 6x_1 + 10x_2$ *(Amaç Denklemi)*
- Kısıtlayıcı Koşullar:

$2x_1 \leq 8$

$4x_2 \leq 24$

$6x_1 + 4x_2 \leq 36$

$x_1, x_2 \geq 0$ (negatif olmama (pozitiflik) koşulu)

LP Modellerde grafik çözümleri

- Grafik çözüm sadece iki karar değişkeni içeren doğrusal programlama modelleri ile sınırlıdır. (üç değişkenli modellerde büyük zorluklarla kullanılabilir).

- Grafik yöntemler doğrusal programlama problemi için çözüm elde eder.

LP Model Formülasyonu Maksimizasyon Örneği Grafik Çözümü

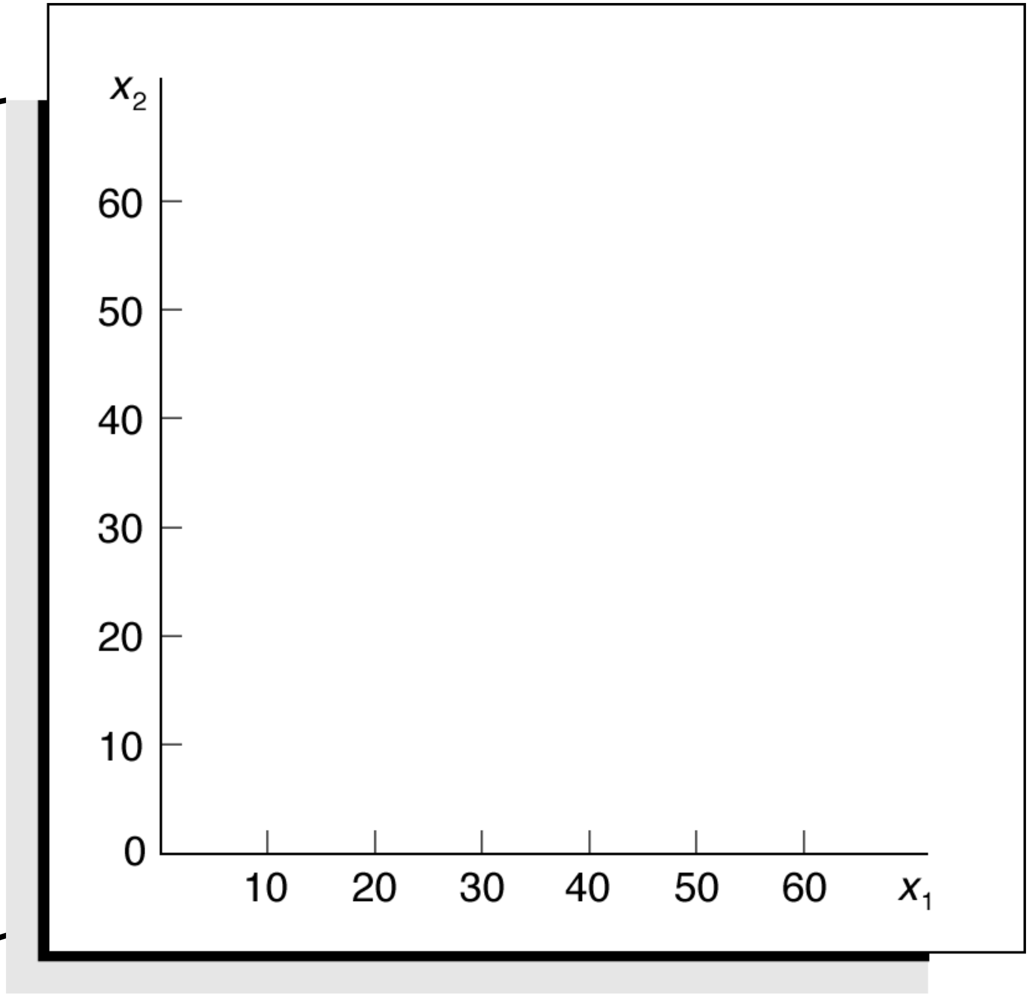
X_2 kupa

Max $Z = 40TLx_1 + 50TLx_2$

$1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_2 + 3x_2 \leq 120$

$x_1, x_2 \geq 0$



X_1 kase

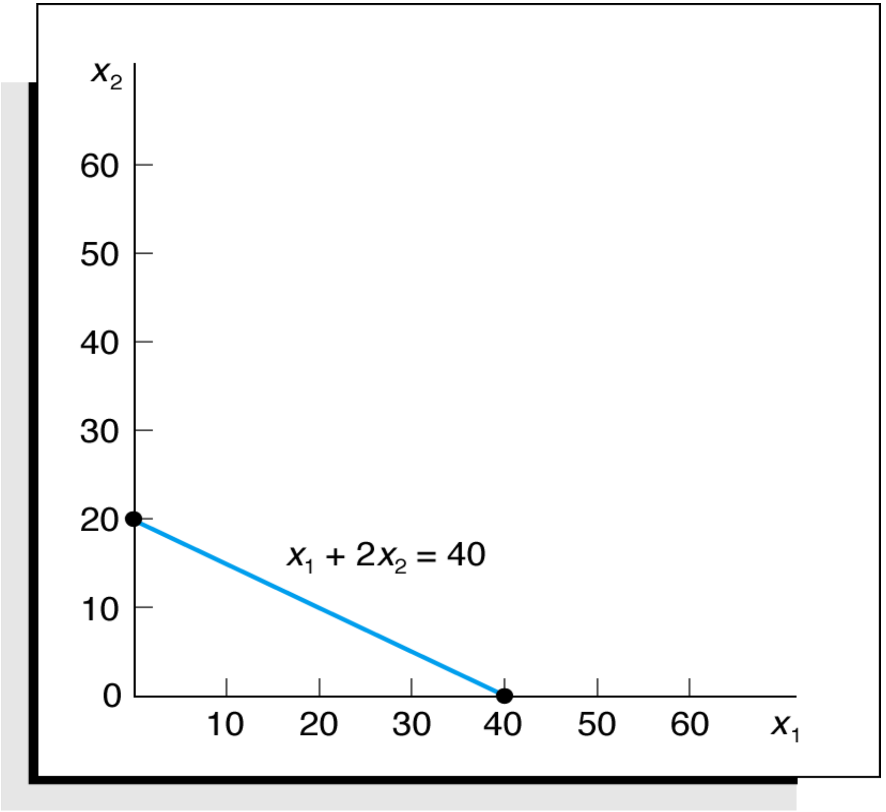
Çalışan kısıtı Maksimizasyon Modeli Grafik Çözümü (2 / 12)

Max $Z = 40TLx_1 + 50TLx_2$

$1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_2 + 3x_2 \leq 120$

$x_1, x_2 \geq 0$



Şekil 2.3 Çalışan kısıtı grafiği

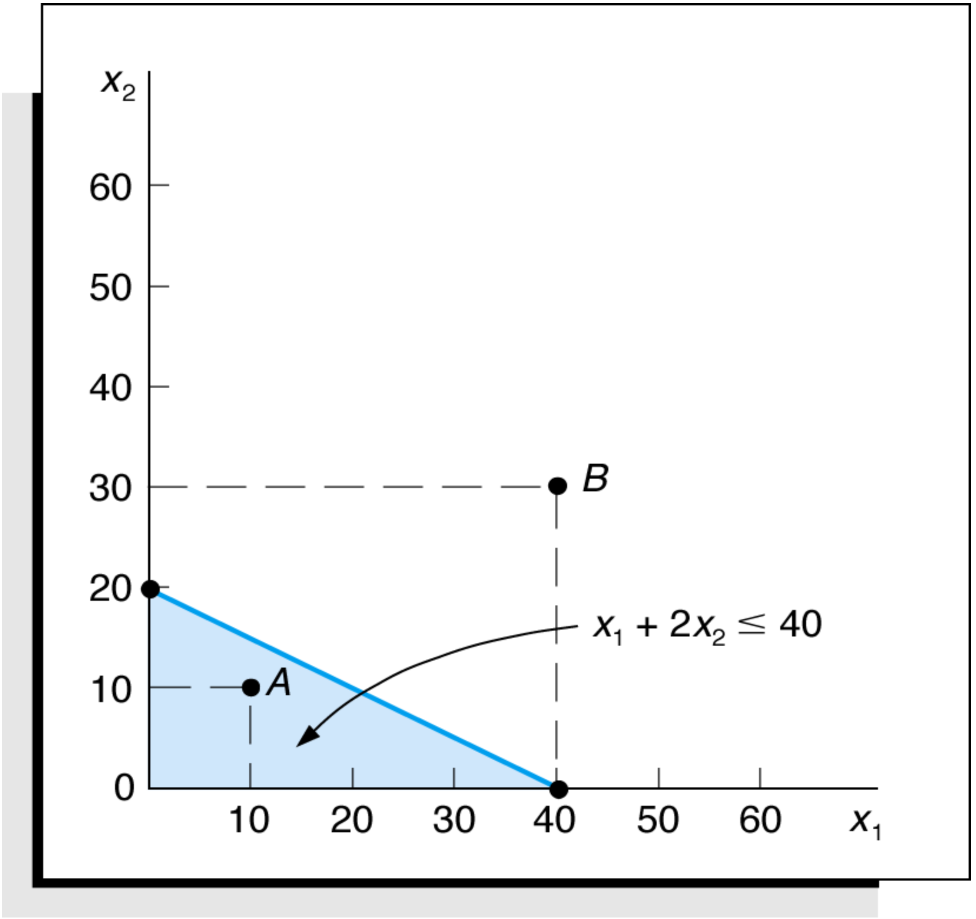
Çalışan kısısıtı alanı Maksimizasyon Modeli Grafik Çözümü (3 / 12)

$$\text{Max} \quad Z = 40TLx_1 + 50TLx_2$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_2 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

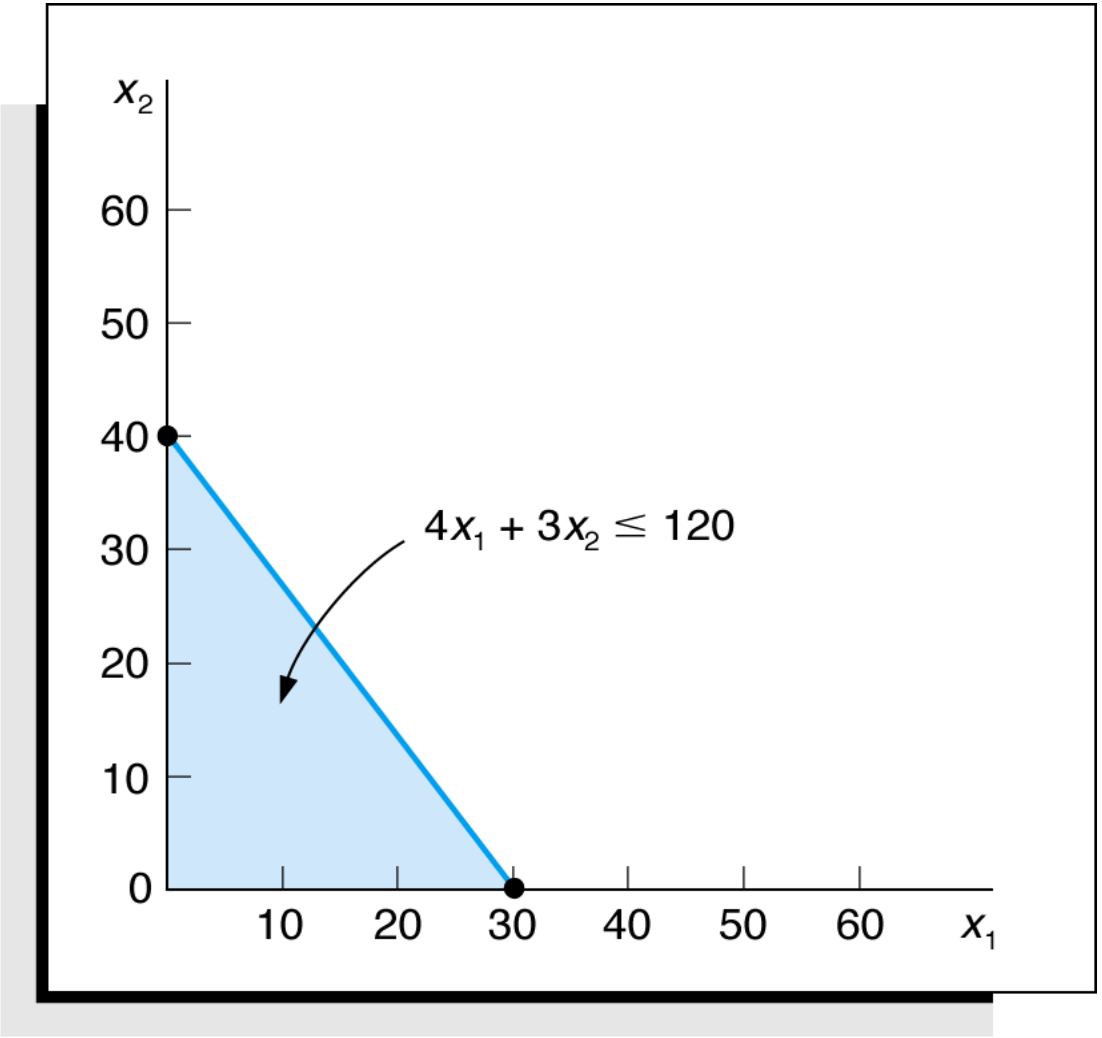


Şekil 2.4 Çalışan kısıtı alanı

Kil kısıtı alan Maksimizasyon Modeli Grafik Çözümü (4 / 12)

Max $Z = 40TLx_1 + 50TLx_2$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 40$$
$$4x_2 + 3x_2 \leq 120$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Şekil 2.5 Kil kısıt alanı

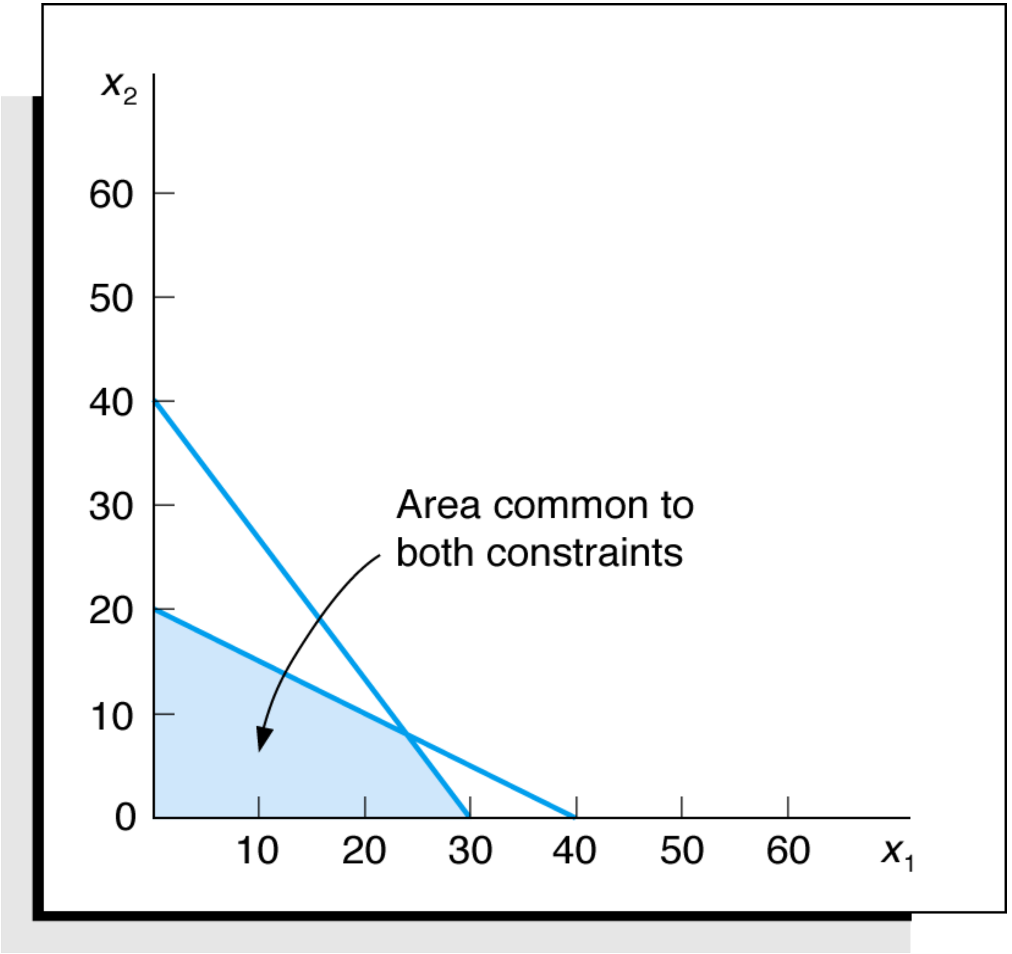
Tüm kısıtlar Maksimizasyon Modeli Grafik Çözümü (5 / 12)

Max $\quad Z = 40TLx_1 + 50TLx_2$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_2 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

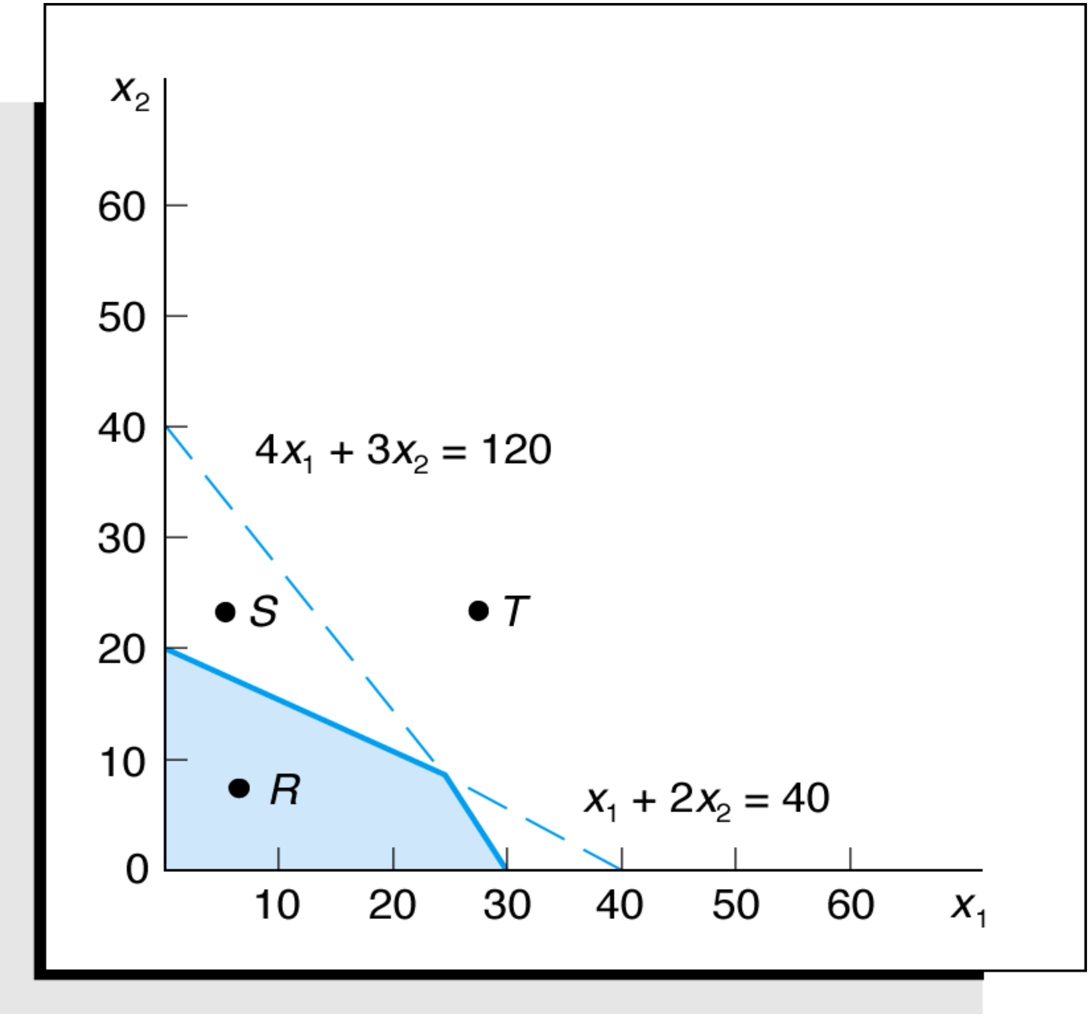


Şekil 2.6 Modelin tüm kısıtları

Uygun Çözüm Alanları Maksimizasyon Modeli Grafik Çözümü (6 / 12)

Max $\quad Z = 40TLx_1 + 50TLx_2$

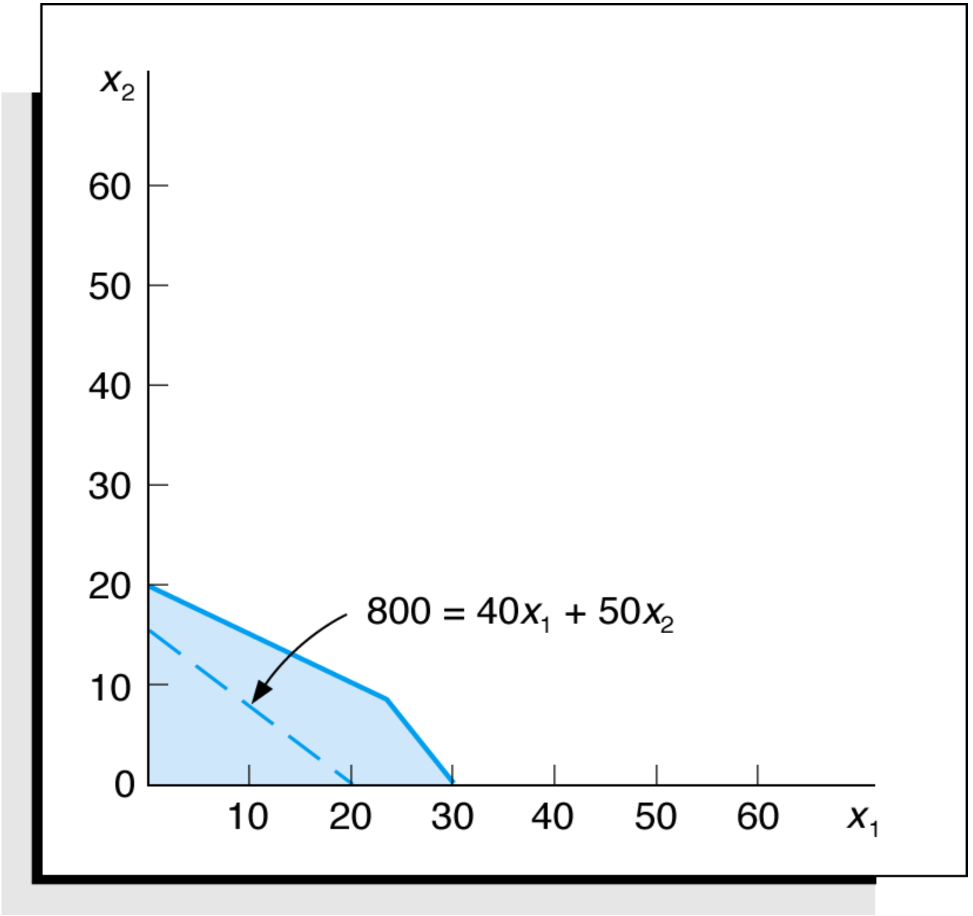
$$1x_1 + 2x_2 \leq 40$$
$$4x_2 + 3x_2 \leq 120$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Şekil 2.7 Uygun çözüm alanları

Amaç fonksiyon çözümü = 800TL Maksimizasyon Modeli Grafik Çözümü (7 / 12)

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 40TLx_1 + 50TLx_2 \\
& 1x_1 + 2x_2 \leq 40 \\
& 4x_2 + 3x_2 \leq 120 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$



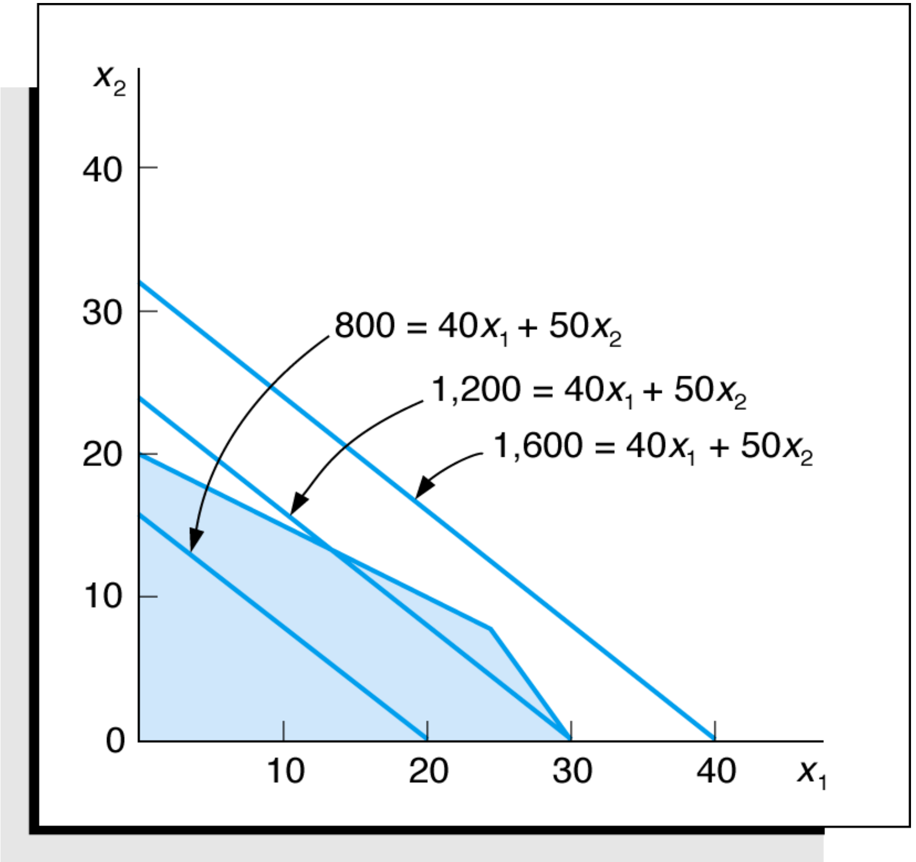
Şekil 2.8 Amaç fonksiyon doğrusu Z =800TL

Alternatif amaç fonksiyonu çözüm doğruları Maksimizasyon Modeli Grafik Çözümü (8 / 12)

Max $\quad Z = 40TLx_1 + 50TLx_2$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 40$$
$$4x_2 + 3x_2 \leq 120$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Şekil 2.9 Alternatif amaç fonksiyonu doğruları, Z, 800TL, 1200TL ve 1600TL



En uygun çözüm Maksimizasyon Modeli Grafik Çözümü (9 / 12

Max $Z = 40TLx_1 + 50TLx_2$

$1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_2 + 3x_2 \leq 120$

$x_1, x_2 \geq 0$

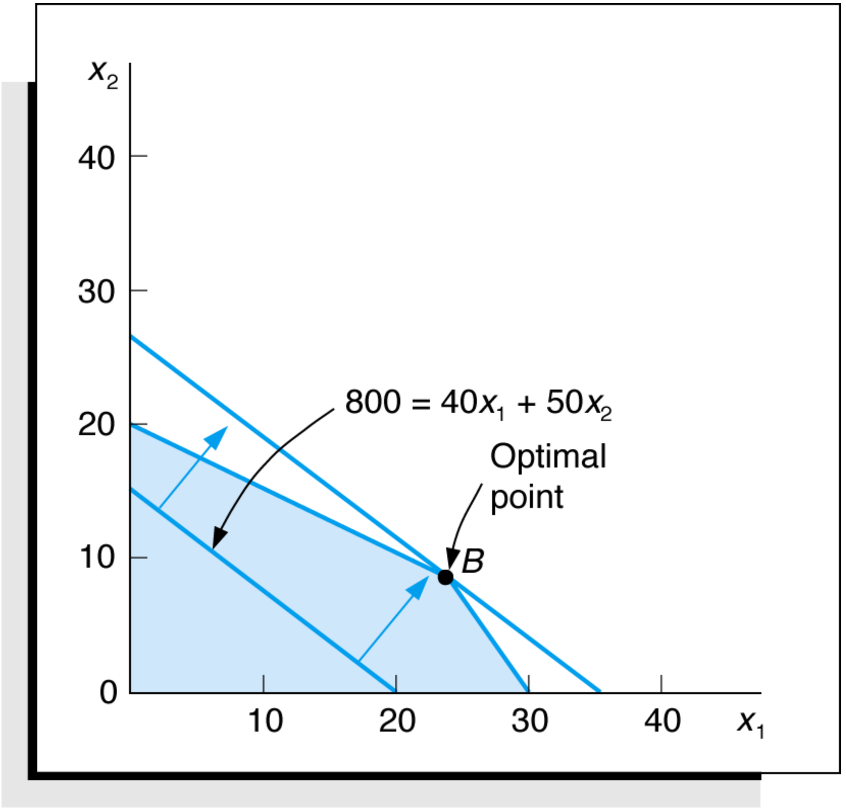


Figure 2.10 En uygun çözüm noktasının belirlenmesi

En uygun çözüm noktasının koordinatları Maksimizasyon Modeli Grafik Çözümü (10 / 12)

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = 40TLx_1 + 50TLx_2 \\
& 1x_1 + 2x_2 \leq 40 \\
& 4x_2 + 3x_2 \leq 120 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

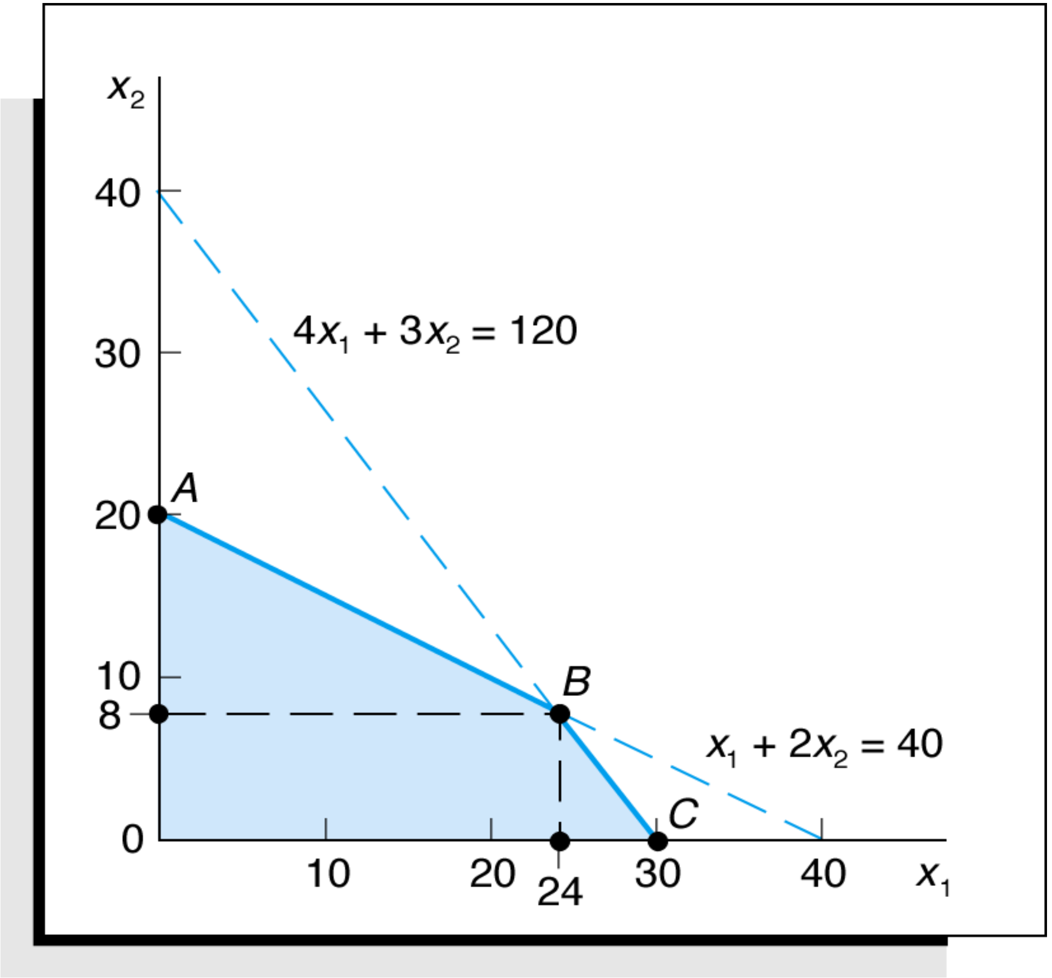


Figure 2.11 En uygun çözüm koordinatları

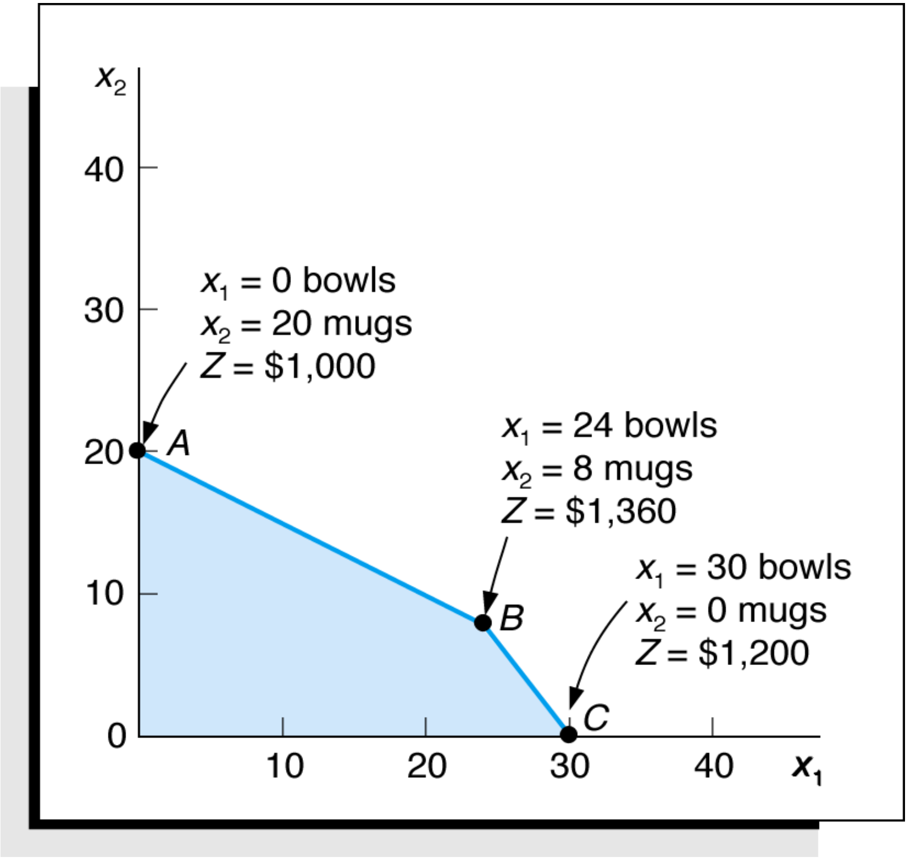
Köşe nokta çözümleri Maksimizasyon Modeli Grafik Çözümü (11 / 12)

Max $\quad Z = 40TLx_1 + 50TLx_2$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 40$$
$$4x_2 + 3x_2 \leq 120$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Bowl: kase

Mug: kupa



Şekil 2.12 Köşe noktaları çözümü

Yeni amaç fonksiyonu için en uygun çözüm Maksimizasyon Modeli Grafik Çözümü (12 / 12)

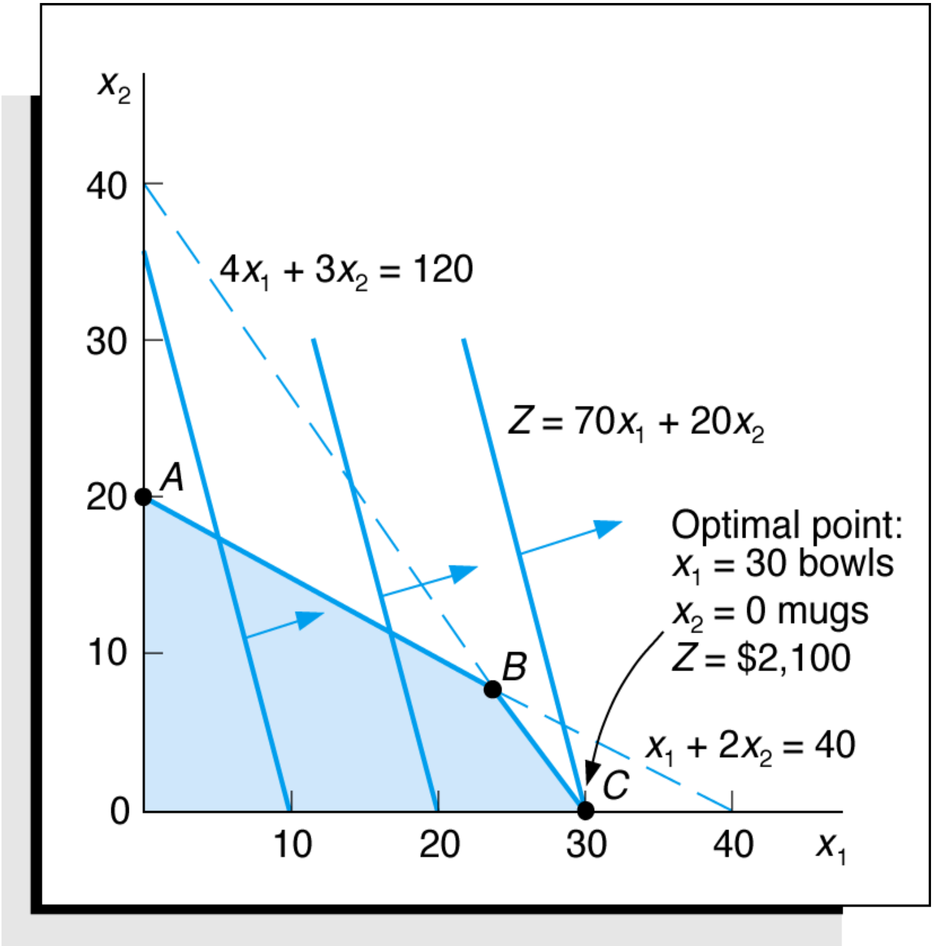
Max $\quad Z = 70TLx_1 + 20TLx_2$

$1x_1 + 2x_2 \leq 40$

$4x_2 + 3x_2 \leq$

120

$x_1, x_2 \geq 0$



Şekil 2.13 En uygun çözüm $Z = 70x_1 + 20x_2$

Teşekkürler.

Dersin Sonu

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr/