KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ

Bilgisayar Mühendisliğinde Matematik Uygulamaları

10. Hafta

Yrd. Doç. Dr. A. Burak İNNER

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr

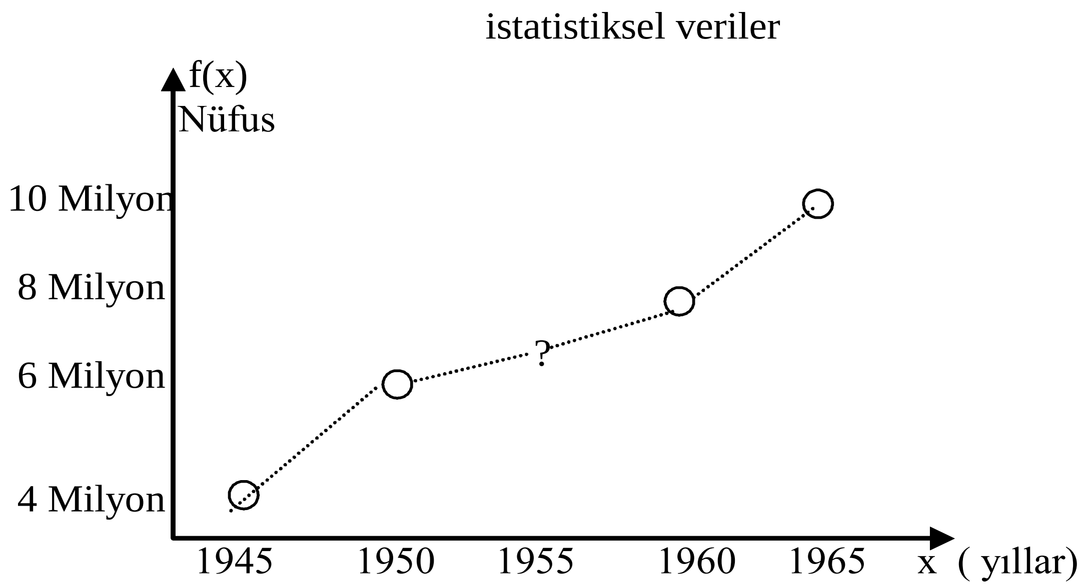
Ara Değer Hesabı

(İnterpolasyon)

İÇİNDEKİLER

Ara Değer Hesabı (İnterpolasyon)

- Ara değer hesabı mühendislik problemlerinde sıklıkla karşılaşılan bir işlemdir.
- İnterpolasyon
  - Bilinen değerlerden bilinmeyen ara değerin ya da değerlerin bulunması işlemidir.
  - Genel olarak ise bir f(x) fonksiyonunun x0, x1, ..., xn gibi ayrık noktalarda verilen f0, f1,...,fn değerlerini kullanarak, bu fonksiyonu temsil eden ve daha basit bilinen bir F(x) fonksiyonu (interpolasyon fonksiyonu) ile ifade edilmesidir.

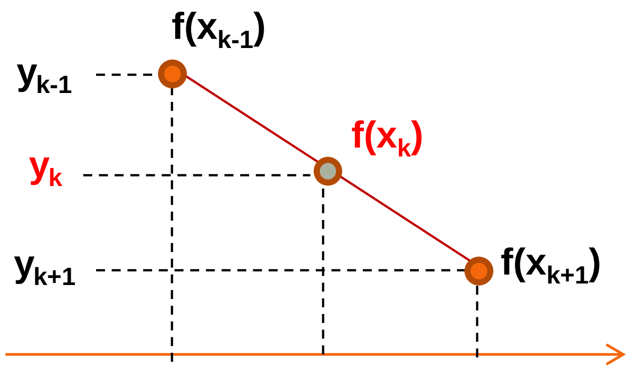


İnterpolasyon

- İnterpolasyon fonksiyonu için polinom, trigonometrik fonksiyon, üstel gibi fonksiyonlar kullanılır. Ancak çoğu durumda koşulları kolaylıkla sağlamaları sebebiyle polinomlar tercih edilir.
- İnterpolasyon fonksiyonunun seçiminde kullanılan teoremler:
- Eğer fonksiyon [a, b] aralığında sürekli ve türevlenebilir ise polinom kullanılabilir.
  - [a,b] aralığında küçük bir ε değeri için,
  - $| f(x) - F(x) | \leq \varepsilon$ koşulu sağlanabilir
- Periyodik (2π) ve sürekli bir fonksiyon için,
  -
  - $F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$
  - şeklinde sonlu bir trigonometrik seri interpolasyon fonksiyonu olarak kullanılabilir.

Doğrusal (Lineer) İnterpolasyon

- Doğrusal interpolasyonda iki farklı değişkene karşılık gelen fonksiyon değerleri (x1, y1), (x2, y2), bir doğru ile birleştirilir.
- Aradeğer (interpolasyon) doğru üzerindedir. Doğru denkleminin elde edilmesi ile interpolasyon bulunur.
- Bilinen iki nokta arasındaki uzaklık ne kadar az ise bilinmeyen nokta için bulunacak interpolasyon fonksiyonunun değeri de o kadar doğru olacaktır.



Doğru Denklemi

$$m = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} \qquad y_k = y_{k-1} + m(x_k - x_{k-1})$$

$$\frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{x_{k-1} - x_k} = \frac{f(x_{k-1}) - f(x_{k+1})}{x_{k-1} - x_{k+1}}$$

Örnek

- Aşağıdaki tablo da bir firmanın son 5 yılki ciro dağılımı görülmektedir. Tabloda 2009 yılına ait sonuç yer almamaktadır. Doğrusal interpolasyon yöntemini kullanarak değeri bulunuz.

Yıllar	2007	2008	2009	2010	2011
Ciro	120	142	?	146	143

- Çözüm:
  - Doğru Denklemi ile;

- $m = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{146-142}{2010-2008} = 2$

$$\frac{f(x_k) - f(x_i)}{x_k - x_i} = \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}}$$

- $y_i = y_k + m(x_i - x_k)$
- $y_i = 142 + 2(2009\text{-}2008)$
- $y_i = 144$

$$\frac{142 - f(x_i)}{2008 - 2009} = \frac{142 - 146}{2008 - 2010}$$

$$f(x_i) = 144$$

Örnek

ln(1) = 0 olduğuna göre, lineer enterpolasyon kullanarak ln(2) = ?
ln(4) = 1.3862944 sonucunu bulunuz. [ln(2) = 0.69314718]
ln(6) = 1.7917595

1. $\boldsymbol{x_0}$ = 1; $\boldsymbol{x_1}$ = 6 alınır ise:

$$f(x_i) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x_i - x_k) = 0 + \frac{1.7917575 - 0}{6 - 1}(2 - 1)$$

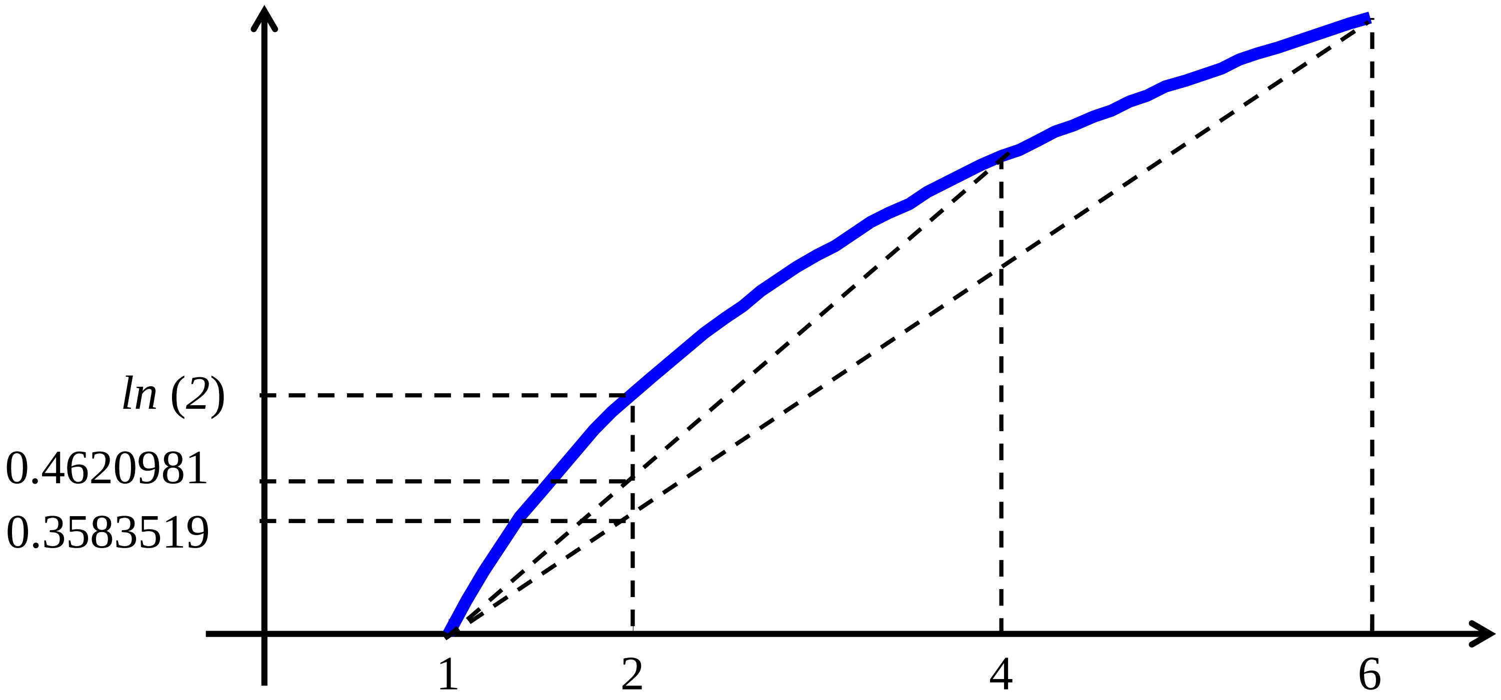
=> ln(2) = 0.3583515 ε_t = %48.3

2. $\boldsymbol{x_0}$ = 1; $\boldsymbol{x_1}$ = 4 alınır ise:

$$f(x_i) = f(x_k) + \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x_i - x_k) = 0 + \frac{1.3862944 - 0}{4 - 1}(2 - 1)$$

=> ln(2) = 0.46209813 ε_t = %33.3

Örnek



MATLAB İle Doğrusal İnterpolasyon

- **YI= interp1 (X, Y, XI)**

X'in bu değeri için işlem yapılacak

bilinen Y değerlerinden oluşan sütun vektörü

bilinen X değerlerinden oluşan sütun vektörü

Y sütun vektöründe bilinmeyen olarak hesaplanacak değer

- Örnek: Önceki sorudaki işlemi MATLAB'ta *interp1* komutu ile çözünüz?

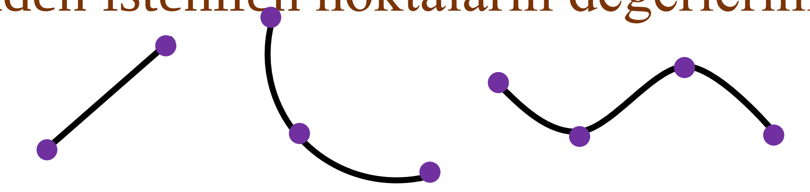
```
x = [1 4 6]';
y = [0 1.3862944 1.7917595]';
Yi=interp1(x,y,2)
```

Doğrusal (Lineer) İnterpolasyon

- Örnek: f(x)= ex fonksiyonunun [0.2, 0.3] aralığındaki değerleri sırasıyla [1.22140, 1.34986]'dır. Doğrusal interpolasyon yöntemi ile x=0.27 noktasındaki değer nedir?

Lagrange Polinom İnterpolasyonu

- Lagrange interpolasyonu, bilinen noktalara önce bir eğri uydurulması sonra eğriyi temsil eden denklemden istenilen noktaların değerlerinin elde edilmesine dayanır.



N adet noktadan N-1. dereceden polinom geçebilir

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
$f(x)$	f_1	f_2	f_3	…	f_n

- n elemandan oluşan bir f(x) yukarıdaki tablodaki gibi tanımlanmış olsun.
- Lagrange yöntemine göre interpolasyon hesabı yapılırken kullanılacak polinom forma sahip fonksiyonun derecesi sahip olunan ölçüm değerlerinin adedinden bir eksik olacak şekilde seçilir.
- $$\mathrm{f(x)} = a_0 + a_1\mathrm{x} + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots. + a_{n-1}x^{n-1}$$

Lagrange Polinom İnterpolasyonu

- Eğer verilen aralıklar eşit değilse Lagrange İnterpolasyon polinomu kullanılır. En basit haliyle 2 nokta kullanan Lineer İnterpolasyon denklemi düzenlenirse:

$$y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_0$$

$$y = [1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}]\, y_0 + + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

Bulunan bu ifade n nokta için genelleştirilirse:

Lagrange Polinom İnterpolasyonu

$$y_p(\mathrm{x}) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\ldots(x_1 - x_n)} * y_1$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\ldots(x_2 - x_n)} * y_2$$

$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_3)(x_n - x_4)\ldots(x_n - x_{n-1})} * y_n$$

Elde edilen *f(x)* eşitliğinde *x* değişkeninin istenilen değer karşılığı sayısal olarak girilmek suretiyle fonksiyonun karşılığı Lagrange yöntemine göre bulunmuş olur.

$$y_p(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} L_i(\mathrm{x}).\, y_i \qquad L_i(\mathrm{x}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Lagrange İnterpolasyon

- Örnek: Aşağıdaki tabloda x'e bağlı bir f(x) fonksiyonunun sayısal değişimi görülmektedir. x=3 için aradeğeri Lagrange interpolasyon yöntemi kullanarak bulunuz.

x	0	2	4	7	10
f(x)	1	7	10	13	20

- Çözüm:

$$\mathrm{f(x)} = \frac{(x-2)(x-4)(x-7)(x-10)}{(0-2)(0-4)(0-7)(0-10)} * 1 + \frac{(x-0)(x-4)(x-7)(x-10)}{(2-0)(2-4)(2-7)(2-10)} * 7$$
$$+ \frac{(x-0)(x-2)(x-7)(x-10)}{(4-0)(4-2)(4-7)(4-10)} * 10 + \frac{(x-0)(x-2)(x-7)(x-10)}{(7-0)(7-2)(7-4)(7-10)} * 13$$
$$+ \frac{(x-0)(x-2)(x-4)(x-7)}{(10-0)(10-2)(10-4)(10-7)} * 20$$

X=3 için f(3)=8.7583

Örnek

ln(1) = 0

ln(4) = 1.3862944

ln(6) = 1.7917595

olduğuna göre, lagrange enterpolasyon kullanarak ln(2) = ? sonucunu bulunuz. [ln(2) = 0.69314718]

$$f(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\, f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\, f(x_1) + \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\, f(x_2)$$

$$\ln(x) = \frac{x-4}{1-4}\frac{x-6}{1-6} * 0 + \frac{x-1}{4-1}\frac{x-6}{4-6} * 1.3862944 + \frac{x-1}{6-1}\frac{x-4}{6-4} * 1.7917595$$

$$\ln(2) = \frac{2-4}{1-4}\frac{2-6}{1-6} * 0 + \frac{2-1}{4-1}\frac{2-6}{4-6} * 1.3862944 + \frac{2-1}{6-1}\frac{2-4}{6-4} * 1.7917595$$

ln(2) = 0.5658413

Örnek

- Aşağıdaki tabloda x'e bağlı bir f(x) fonksiyonunun sayısal değişimi görülmektedir. $x = 2.3$ için ara değeri Lagrange interpolasyon yöntemi kullanarak bulunuz

x	1.1	1.7	3
f(x)	10.6	15.2	20.3

- $y_p(\mathrm{x}) = \frac{x-1.7}{1.1-1.7}\frac{x-3}{1.1-3}10.6 + \frac{x-1.1}{1.7-1.1}\frac{x-3}{1.7-3}15.2 + \frac{x-1.1}{3-1.1}\frac{x-1.7}{3-1.7}20.3$

- $\mathrm{x} = 2.3 \quad => \quad y_p(2.3) = 18.3813$

Örnek

- Aşağıdaki tabloda x'e bağlı bir f(x) fonksiyonunun sayısal değişimi görülmektedir. X=4 için ara değeri Lagrange interpolasyon yöntemi kullanarak bulunuz
  - Soruyu hem el ile hemde matlab ile çözünüz. Matlab da program (döngüler) yazınız

x	0	2	5	7	9
$f(x)$	2	6	8	11	15

Örnek

f(4) = 7.190476

```
x=[0 2 5 7 9]
f=[2 6 8 11 15]
a=4
snc=0
for i=1:length(x)
    crpm=1;
    for j=1:length(x)
        if i==j
            crpm=crpm;
        else
            crpm=crpm*(a-x(j))/(x(i)-x(j));
        end
    end
    snc=snc+crpm*f(i);
end
snc
```

Neville (Aitken) Yöntemi

- Neville yöntemi Lagrange yönteminin kapalı formda farklı bir uygulaması olup, Lagrange yönteminin zaaflarını gidermesi beklenen bir yöntemdir.

- Bu yöntemde interpolasyon değeri, polinomun derecesi ardarda arttırılarak hesaplanır. Polinomun değeri her arttırıldığında elde edilen interpolasyon değerinin bir önceki değerle yakınsayıp yakınsamadığı kontrol edilir.

- Yöntemin iyi anlaşılabilmesi için bir örnek olmak üzere ($x0$, $x1$, $x2$) gibi üç veri noktasında bir fonksiyonun değerlerinin sırasıyla ($f0$, $f1$, $f2$) olarak verildiğini varsayalım.

Neville (Aitken) Yöntemi

Şayet ilk iki nokta arasında doğrusal interpolasyon yapılırsa Lagrange formülü:

$$f(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 \; \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1$$

şeklinde yazılabilir. Doğrusal interpolasyon son iki nokta arasında yapılırsa Lagrange formülü için bu kez

$$f(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f_2$$

elde edilir.

- Üç nokta arasından parabolik bir eğri geçirilerek interpolasyon yapılırsa Lagrange formülü:

$$\mathrm{f(x)} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\ \mathrm{f}(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\,\mathrm{f}(x_1)\ + \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\mathrm{f}(x_2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu formüldeki ikinci terimin katsayısı

$$\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\cdot\frac{(x_0-x_2)}{(x_0-x_2)} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0-x_2)}\cdot\frac{(x_0-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0-x_2)}\cdot\left[\frac{1}{(x_1-x_0)}-\frac{1}{(x_1-x_2)}\right]$$

$$= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0-x_2)(x_1-x_0)} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

şeklinde düzenlenerek Lagrange formülü

$$f(x)= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_0-x_2)(x_1-x_0)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

şekline getirilebilir. Bu formülü

$$f(x)= \frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)} \left[\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} f_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} f_1 \right] + \frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)} \left[\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} f_2 \right]$$

- şeklinde düzenlemek mümkündür. Burada köşeli parantezlerin içinde yer alan terimlerin daha önceki doğrusal interpolasyonla bulunan değerler olduğu dikkati çekmektedir. Buna göre;

- Veri noktalarındaki fonksiyon değerleri;

$P_{00} = f_0$; $P_{10} = f_1$; $P_{20} = f_2$

Ve ilk doğrusal interpolasyonla bulunan değerler ;

$$P_{01} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} P_{00} + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} P_{10} \quad P_{11} = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} P_{10} + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} P_{20}$$

Şeklinde yeniden isimlendirilirse parabolik yaklaşım sonucu elde edilen son formül ;

$$P_{02} = \frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)} P_{01} + \frac{(x-x_0)}{(x_2-x_0)} P_{11}$$

Örnek

Yandaki veri noktaları yardımıyla x=27.5 noktasındaki interpolasyon değeri bulunmak istensin.

x	F(x)
10.1	0.17537
22.2	0.37784
32.0	0.52992
41.6	0.66393
50.5	0.63608

Önce noktaları interpolasyon noktasına olan uzaklıklarına göre sıralayalım:

Yukarıda izah edildiği gibi ardışık doğrusal interpolasyonlar uygulayarak aşağıdaki gibi bir tablo elde etmek mümkündür:

i	$x\text{-}x_i$	x_i	$F(x)$
0	4.5	32.0	0.52992
1	5.3	22.2	0.37784
2	14.1	41.6	0.66393
3	17.4	10.1	0.17537
4	23.0	50.5	0.63608

Bölünmüş Farklar

- Lagrange ve Neville yöntemlerinin bazı olumsuz yanları vardır:

- İşlem sayısı çok fazladır (bazı başka yöntemlere kıyasla)

- Data setinde bir nokta ilavesi veya çıkartılması halinde bütün hesapların baştan yenilenmesi gerekmektedir.

- Her bir interpolasyon noktası için benzeri hesapların tekrarlanması gerekmektedir.

Bölünmüş fark tabloları bu olumsuzlukları gidermekte yararlı olmaktadır.

$$(x_0, f_0); \quad (x_1, f_1); \quad (x_2, f_2); \quad (x_3, f_3);$$

şeklinde bir data seti verilmiş olsun.

$$p_N(x) = a_0 + (x - x_0) a_1 + (x - x_0)(x - x_1) a_2 + \ldots. + (x - x_0)(x - x_1) \ldots. (x - xN)\, aN$$

şeklinde düzenlenmiş olduğunu varsayalım. Buradaki a_i katsayıları uygun seçildiği taktirde yukarıdaki bütün data noktaları bu fonksiyonu sağlayabilir. İşte bu katsayılar bölünmüş fark tabloları yardımıyla elde edilecektir.

i	$x-x_i$	x_i	P_{i0}	P_{i1}	P_{i2}	P_{i3}	P_{i4}
0	4.5	32.0	0.52992	0.46009	0.46200	0.46174	0.45754
1	5.3	22.2	0.37784	0.45600	0.46071	0.47901	
2	14.1	41.6	0.66393	0.44524	0.55843		
3	17.4	10.1	0.17537	0.37329			
4	23.0	50.5	0.63608				

- Burada en üstteki satır interpolasyon noktasında çeşitli derecelerden Lagrange formülleriyle elde edilecek interpolasyon değerlerini içermektedir. İnterpolasyon değerinin 3. dereceden bir Langrange formülasyonuna kadar belli bir değere yakınsadığı, ancak dördüncü dereceden Lagrange formülünün kullanılması halinde interpolasyon değerinde bir ıraksama oluştuğu dikkati çekmektedir. O halde bu interpolasyon noktasında hesaplama için 3. dereceden yaklaşımın yeterli olduğu anlaşılmaktadır.

- Nitekim, aslında bu örnekte verilen değerler derece cinsinden açılara karşılık sinüs fonksiyonunun değerleri olup interpolasyon noktası olan x=27.5 açısında sinüs fonksiyonunun gerçek değeri de sin(27.5°)=0.46175 dir.

TERS İNTERPOLASYON

- f(x) ve x, interpolasyon bağlamında sırasıyla bağımlı ve bağımsız değişkenlerdir. Dolayısıyla, x değerleri genellikle eşit aralıklıdır. $f(x) = 1/x$ fonksiyonu için türetilmiş aşağıdaki tablo değerleri basit bir örnektir.

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	1	0.5	0.3333	0.25	0.2	0.1667	0.1429

- Yukarıdaki veriler için $f(x) = 0.3$ değerine karşılık gelen x değerinin belirlenmesi istenseydi; fonksiyon bilindiğine ve hesabı kolay olduğuna göre sonuç doğrudan $x = 1/0.3333$ olarak belirlenebilir.

- Daha karmaşık bir durumda, f(x) ve x değerlerini değiş tokuş etme (yani yalnızca f(x)'e karşılık x'i çizmeye) ve sonuçları lagrange interpolasyon polinomu ile belirlenebilir. Ancak değişkenler yer değiştirtildiğinde, yeni apsisler (f(x)'ler) boyunca değerler düzgün sıralanmayabilir.

- Birçok durumda, değerler "teleskopik" özellik gösterir. Yani logaritmik ölçekli bazı diyagramlarda olduğu gibi, bazı komşu noktaların bir araya yığıldığı, diğerlerininse bundan oldukça uzaklara serpiştirildiği bir görüntü ortaya çıkar. Örneğin $f(x) = 1/x$ fonksiyonu için sonuçlar aşağıdaki gibidir.

f(x)	1	0.5	0.3333	0.25	0.2	0.1667	0.1429
x	1	2	3	4	5	6	7

- Apsis boyunca buradaki gibi üniform (eşit aralıklı) olmayan bir dağılım, interpolasyon polinomunun sonuçlarında çoğunlukla salınıma neden olur. Hatta düşük dereceli polinomlarda bile ortaya çıkabilir.

- Alternatif bir yöntem ise, orijinal verilere (yani x'e karşılık f(x)) n'inci dereceden bir $f_n(x)$ interpolasyon polinomu uydurmaktadır. Birçok durumda durumda x'ler düzgün dağıldığı için bu polinom kötü koşullanmış olmayacaktır. Problemin yanıtı ise, bu polinomu verilen f(x) polinomuna eşit yapan x değerinin bulunması olacaktır.. Böylelikle interpolasyon bir kök bulma problemine indirgenecektir.

- Örneğin azönceki problem için basit bir yaklaşım, üç noktadan [(2,0.5), (3,0.333), (4,0.25)] geçen bir ikinci dereceden polinom uydurulması olabilir:

$$f_2(x) = 0.041667x^2 - 0.375x + 1.08333$$

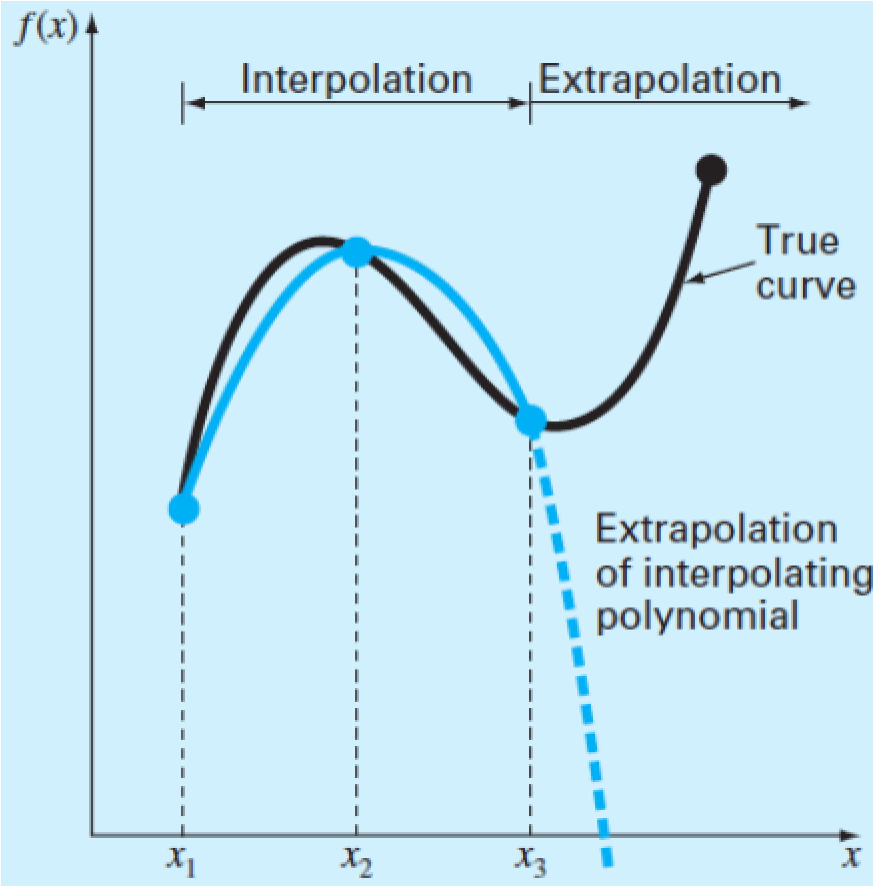
- Bu nedenle f(x) = 0.3 noktasına karşılık gelen x değerinin bulunması şeklindeki ters interpolisyon probleminin yanıtı, aşağıdaki denklemin köklerinin bulunmasına dönüşecektir:

$$0.3 = 0.041667x^2 - 0.375x + 1.08333$$

- Burada incelenen basit durum için ikinci derece kök denklemi kullanılabilir:

$$x = \frac{0.375 \pm \sqrt{(-0.375)^2 - 4(0.041667)0.78333}}{2(0.041667)} = \begin{matrix} 5.704158 \\ 3.295842 \end{matrix}$$

- Burada ikinci kök 3.296, gerçek değer 3.333'e iyi bir yaklaştırmadır. Eğer daha duyarlı bir sonuç isteniyorsa, üçüncü veya dördüncü dereceden bir polinom kulanılarak kök bulma yöntemlerinden birisiyle kök aranabillir.



Bir ekstrapolasyon tahmininden olası sapmanın gösterilmesi.
Ekstrapolasyon, bilinen ilk üç noktadan geçen bir parabole dayanmaktadır.