KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ

Bilgisayar Mühendisliğinde Matematik Uygulamaları

7. Hafta

Yrd. Doç. Dr. A. Burak İNNER

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

DOĞRUSAL OLMAYAN (NONLINEAR) DENKLEM SİSTEMLERİ

- Mühendisliğin birçok alanında karşılaşılan denklemlerden biri de lineer olmayan denklem veya denklem sistemlerdir. İki veya daha yüksek dereceli polinomlar veya trigonometrik, üstel ve logaritmik gibi lineer olmayan terimler içeren denklemler lineer olmayan denklemlerdir.
- Genelde lineer olmayan denklemler $f(x) = 0$ kapalı formunda yazılırlar.
- Karşılaşılan denklemlerin çoğu tek değişkenli olmakla beraber çok değişkenli

$f(x1, x2, x3,\ldots) = 0$ denklemlerin çözümü de söz konusu olabilir.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

- Kök bulma işlemi, verilen $f(x)$ denkleminde $f(xk) = 0$ değerini sağlayan (xk) değerlerinin bulunması işlemidir. Tek değişkenli bir fonksiyon için bu değerler aynı zamanda eğrinin x eksenini kestiği noktalardır. Kök bulma işlemlerinde öncelikle kökün hangi aralıkta olduğu belirlenir.

- a ve b gibi iki farklı sayı ile belirlenen aralıkta $(a \leq xk \leq b$ tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonu bu aralıkta sürekli ise $f(a) \times f(b) < 0$ ise, öyle bir (xk) değeri vardır ki, $f(xk) = 0$ eşitliğini sağlar.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

- Kök bulma işlemi denklemi sağlayan bağımsız değerlerin bulunması işlemidir denebilir. Bazı denklemler için analitik çözümler geliştirilememekte ve yaklaşık çözümler üretilmektedir. Yaklaşık çözüm elde etmenin en pratik ve en ilkel yolu grafik yöntemidir.

Grafik yöntemi:

Grafik yönteminde fonksiyona ait bazı değerler elde edilerek grafiği çizilir. Çizilen grafik yardımı ile grafiğin x eksenini kestiği kök noktası tahmin edilir.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Örnek: $f(x) = xe^{x} - 2$ ifadesini [0,1] aralığında 0.25 aralıklar ile inceleyelim.

Çözüm:

x	F(x)
0,0	-2
0,25	-1,6788993
0,5	-1,175639
0,75	-0,412250
1,0	0,718281

f (0,75) × f (1,0) < 0 olduğundan aranan kök [0.75,1.0] aralığındadır.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

- $f(x)=0$ denklemleri için kullanılan yaygın olarak 5 tane lineer olmayan denklem çözümü vardır;

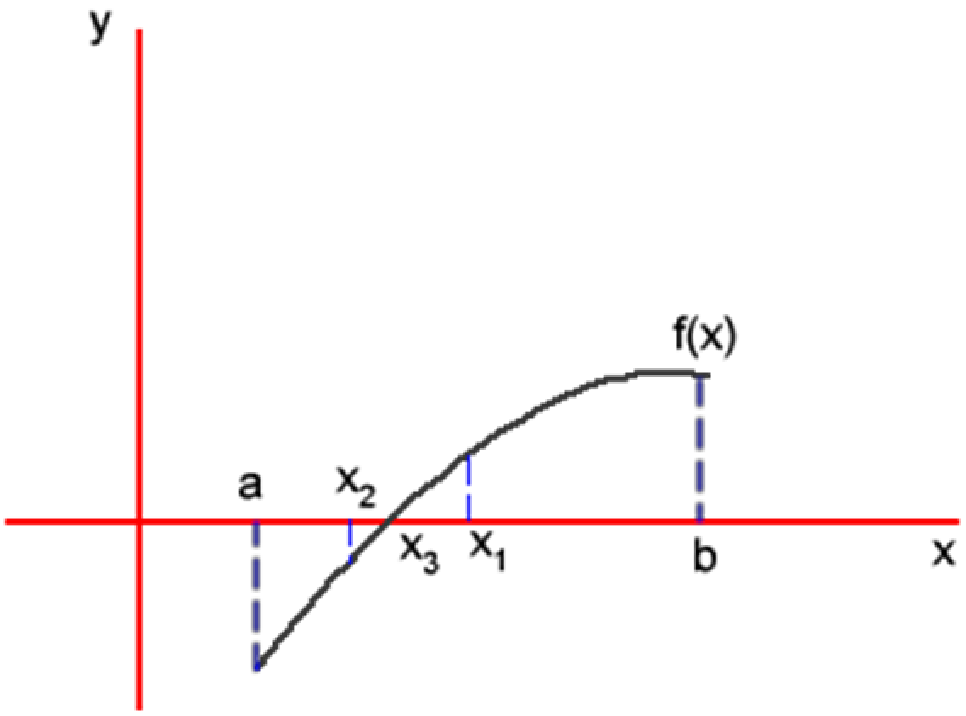
1. Yarıya Bölme (Bisection)
2. Lineer Interpolasyon (Regula-Falsi)
3. Basit İterasyon
4. Newton-Raphson
5. Kiriş (Secant)

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

YARIYA BÖLME (BİSECTİON) YÖNTEMİ:

- $f(x) = 0$ şeklinde bir denklem verilsin. $f(x)$ fonksiyonu [a,b] aralığında sürekli ve $f(a) \times f(b) < 0$ ise $f(x)$ fonksiyonunun (a,b) aralığında bir yada birden fazla kökü vardır.
- Bu yöntem birden fazla kök için geçerli olsa da biz $f(x)$ 'in (a,b) aralığında sadece bir kökünün olduğunu varsayacağız.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ



$f(a) \times f(b) < 0$ olduğundan (a,b) aralığında kök vardır.

1. İterasyon; $x_1 = (a + b) \div 2$

2. İterasyon; IF $f(a) \times f(x_1) < 0$ ise

$x_2 = (a + x_1) \div 2$;

ELSE $x_2 = (b + x_1) \div 2$

3. iterasyon; IF $f(a) \times f(x_2) < 0$ ise

$x_3 = (a + x_2) \div 2$;

ELSE $x_3 = (x_1 + x_2) \div 2$

Şeklinde iterasyon belirlenen hata aralığına ulaşıncaya kadar devam eder.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Örnek: $f(x) = x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 120\text{x} - 130$ eşitliğinin (1,2) aralığında bir köke sahip olduğu bilinmektedir. Bu kökü $\varepsilon_y \leq 0{,}0132$ yaklaşım hatası ile bulunuz.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Çözüm: a = 1.0 ve b = 2.0

a = 1.0 iken $f(1.0) = -20$ ve b = 2.0 iken $f(2.0) = 46$

1.Adım : $f(a) \times f(b) = (-20) \times 46 < 0$ olduğundan bu aralıkta kök vardır.

$x_1 = (a + b) \div 2 = (1+ 2) \div 2 = 1.5$ ve $f(1.5) = 20.2$

$\mathrm{b} = x_1 = 1{,}5$ olur.

2. Adım: $f(a) \times f(b) < 0$ olduğundan

$x_2 = (a + b) \div 2 = (1+ 1.5) \div 2 = 1.25$ ve $f(1.25) = 1.8$

$b = x_2 = 1{,}25$ olur.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

3.Adım: $f(a) \times f(b) < 0$ olduğundan

$x_3 = (a + b) \div 2 = (1 + 1.25) \div 2 = 1.125$ ve $f(1.125) = -8.7$

$a = x_3 = 1.125$ olur.

4.Adım: $f(a) \times f(b) < 0$ olduğundan

$x_4 = (a + b) \div 2 = (1.125 + 1.25) \div 2 = 1.1875$ ve $f(1.1875) = -3.4028$

$a = x_4 = 1.1875$ olur.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

5.Adım: $f(a) \times f(b) < 0 \; olduğundan$

$x_5 = (a+b) \div 2 = (1.1875 + 1.25) \div 2 = 1.21875$ ve $f\,(1.21875) = -0.80688$

$a = x_5 = 1.21875$ olur.

6.Adım: $f(a) \times f(b) < 0$ olduğundan

$x_6 = (a+b) \div 2 = (1.21875 + 1.25\,) \div 2 = 1.234375$ ve $f\,(x_6) = 0{,}472092$

$b = x_6 = 1.234375$ olur.

$\varepsilon_y \leq |(1.234375 - 1.21875) \div 1.234375| = 0{,}01265$ için verilen hata değeri koşulunda bir ε_y değeri bulunduğundan iterasyon sona erer.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

- İterasyon işleminin algoritması;

1. $IF\ f(a) \times f(b) < 0$
3. $\quad REPEAT$
4. $\qquad x_k = \frac{a+b}{2};$
5. $\qquad IF\ f(a) \times f(x_k) < 0$
6. $\qquad\quad b = x_k$
7. $\qquad ELSE$
8. $\qquad\quad a = x_k$
9. $\qquad Hatayı\ Hesapla\ (\varepsilon)$
9. $\quad UNTIL\ (\varepsilon \leq Hata\ Toleransı)$
10. $ELSE$
11. $\quad$ "(a, b) aralığında kök yoktur."

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Örnek: $\mathrm{f(x)} = 4.5x - 2cosx$ fonksiyonu için basit iterasyon yöntemi ile kökleri bulan matlab kodunu yazalım.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Command Window

```
>> %bu programla ikiye bölme yöntemi ile fonksiyonun kök değerleri belirlenmektedir.
F=inline('4.5*x-2*cos(x)');
a=0;b=1;imax=15;tol=0.001; %başlangıç iterasyon ve tolerans değerleri
Fa=F(a); Fb=F(b);
if Fa*Fb>0
disp('fonksiyon a ve b noktasında aynı işarete sahip')
else
disp('iterasyon     a           b           (xi)          Fonk.degeri          Tolerans')
for i=1:imax
xi=(a+b)/2; %ikiye bölme yöntemi eşitliği
tole=(b-a)/2;
Fxi=F(xi);
fprintf('%3i%15.5f%15.5f%%15.5f%15.5f%15.5f\n',i,a,b,xi,Fxi,tole)
if Fxi==0
fprintf('gerçek çözüm x=%15.5f bulundu',xi)
break
end
```

dogrusal.m

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Command Window

```
fprintf('gerçek çözüm x=%15.5f bulundu',xi)
break
end
if tole<tol
break
end
if i==imax
fprintf('%i iterasyonda çözüm elde edilemedi', imax)
break
end
if F(a)*Fxi<0
b=xi;
else
a=xi;
end
end
end
```

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

NEWTON RAPHSON YÖNTEMİ

- Genel olarak $\nabla f(x) \neq 0$ gerek şartını sağlamak doğrusal olmayan ifadelerde oldukça zordur ve bu sebeple çözümler zor olabilir.
- Newton-Raphson yöntemi, doğrusal olmayan denklemlerin çözümü için iteratif(adım-adım) bir yaklaşım sunmaktadır.

Aşağıdaki denklemi ele alalım:

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

x_0 verilmiş bir nokta olsun. 1. Mertebe Taylor açılımından:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$$ (2. Ve sonraki türevler ihmal edilerek)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

yazılabilir. Genel ifade aşağıdaki gibi olacaktır.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Yukarıdaki ifade kullanılarak bir fonksiyonun kökü, yinelemeli yakınsama ile bulunmaya çalışılır. Bu ifadeyi aşağıdaki gibi yazmak da mümkündür.

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

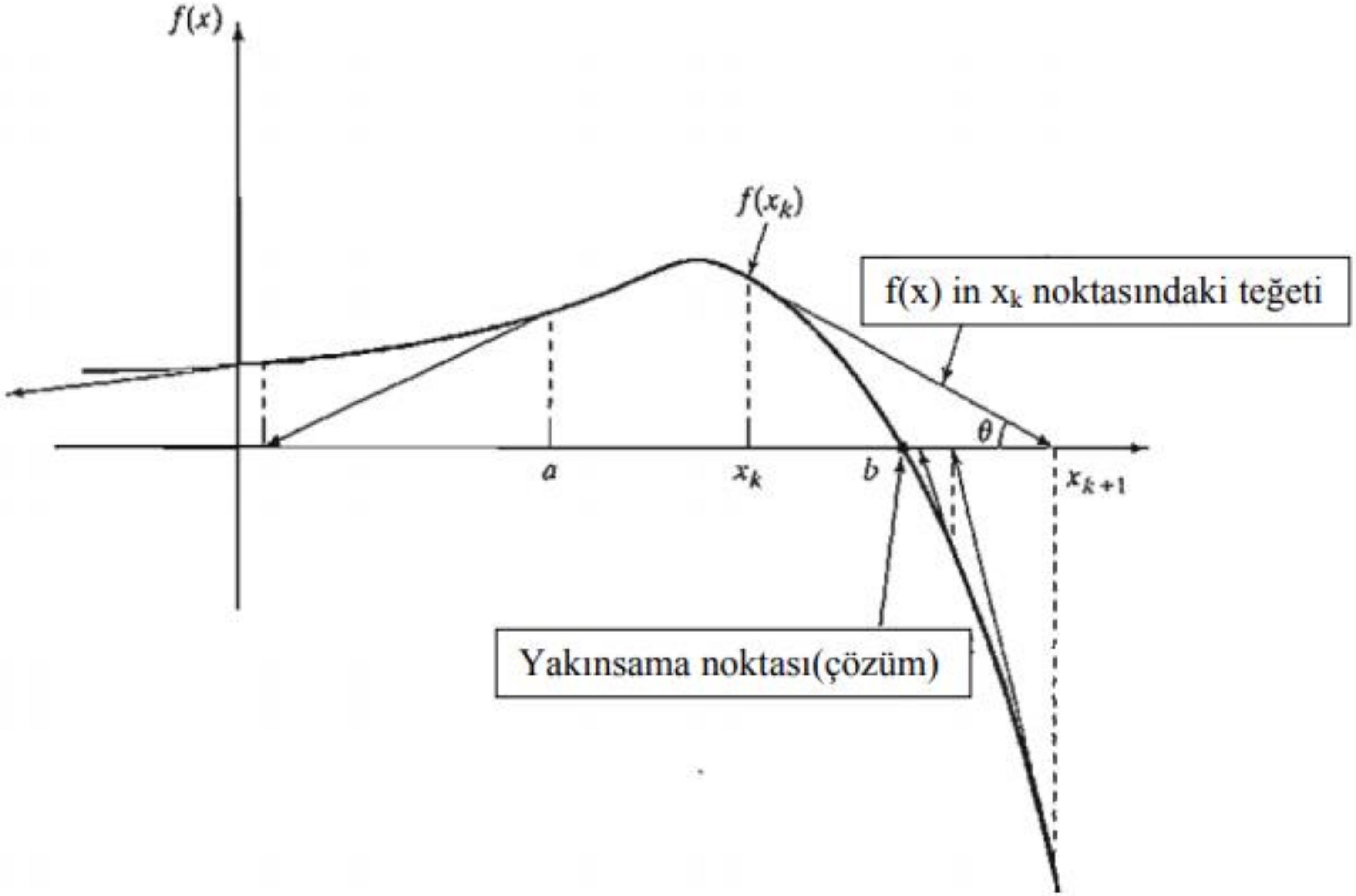
LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Buna göre, x_{k+1} noktası, $f(x_k)$ fonksiyonunun x_k noktasındaki eğiminden bulunacaktır. Burada $tan\,\theta = f'(x_k)$'dır. Bu durum aşağıdaki şekilden de incelenebilmektedir.

Fonksiyonun **optimum** noktasını bulmak için ise **önce fonksiyonun türevi alınır** ve türevi alınmış fonksiyona yukarıdaki işlemler uygulanır.

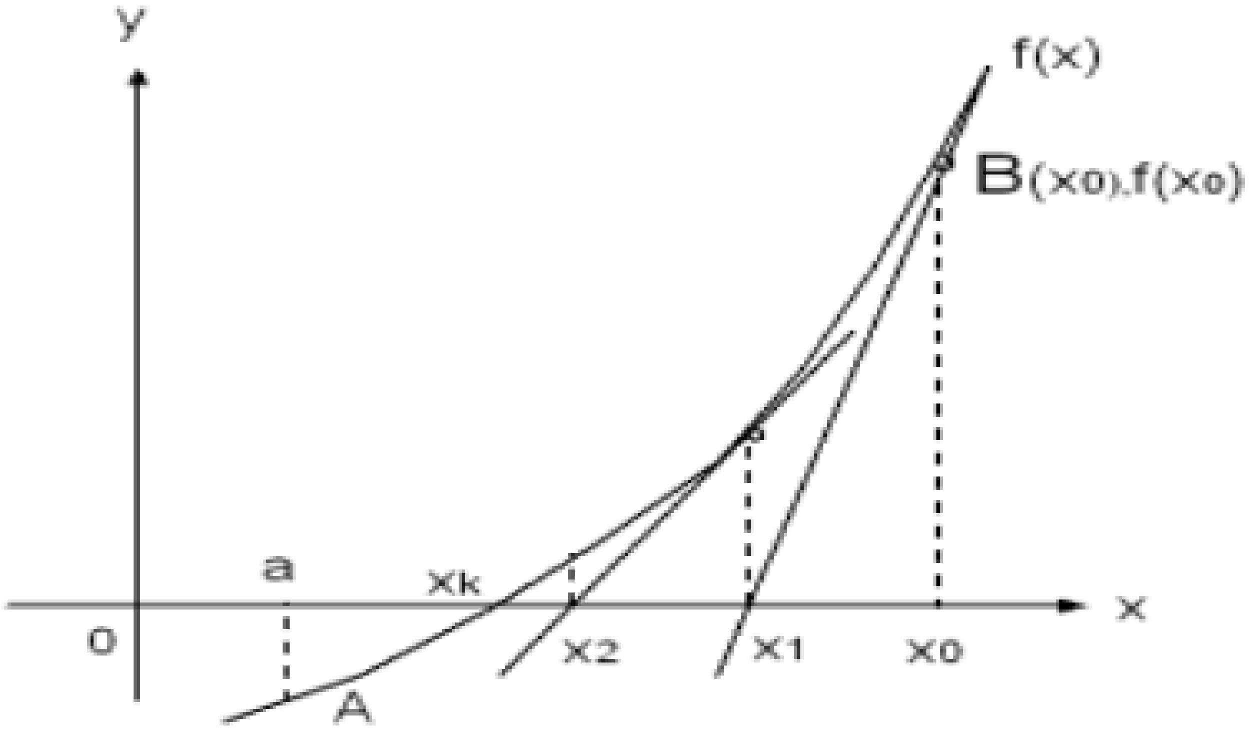
Yakınsama her zaman mümkün olmayabilir. Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi başlangıç çözümü olarak ***a*** alındığında çözümden uzaklaşılacaktır. Genel olarak, yakınsama sağlanana kadar birçok başlangıç noktası seçmek gerekebilmektedir.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ



LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Newton-Raphson yöntemi **Teğetler Yöntemi** olarak da bilinir. Her bir noktanın teğetleriyle köke yaklaşılır.



LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Örnek: $g(x) = (3x-2)^2(2x-3)^2$ ksiyounu için Newton raphson yöntemini uygulayalım.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Öncelikle fonksiyonun türevi alınmalıdır:

$$f(x) \equiv g'(x) = 144x^3 - 468x^2 + 482x - 156 = 0$$

İkiye bölerek sadeleştirirsek;

$$\boldsymbol{f(x) \equiv g'(x) = 72x^3 - 234x^2 + 241x - 78 = 0}$$

Newton-Raphson yöntemi için $f(x)$ fonksiyonunun türevini alırız ve x_{k+1} noktalarını yinelemeli olarak elde ederiz.

$$f'(x) \equiv g''(x) = 216x^2 - 468x + 241$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)} = x_k - \frac{g'(x)}{g''(x)} = x_k - \frac{72x^3 - 234x^2 + 241x - 78}{216x^2 - 468x + 241}$$

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

$x_0 = 10$ noktasından başlayarak elde edilen yeni noktalar ve yaklaşık çözüm değeri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

k	x_k	f(x)	f'(x)	f(x)/f'(x)	x_{k+1}
0	10,000000	50932	17161	2,9678923	7,032108
1	7,032108	15082,7	7631,29	1,9764288	5,055679
2	5,055679	4463,431	3395,878	1,3143672	3,741312
3	3,741312	1318,807	1513,507	0,871358	2,869954
4	2,869954	388,277	676,9746	0,5735474	2,296406
5	2,296406	113,3633	305,3539	0,371252	1,925154
6	1,925154	32,43006	140,5711	0,2307022	1,694452
7	1,694452	8,793732	68,16869	0,1289996	1,565453
8	1,565453	2,042065	37,70681	0,0541564	1,511296
9	1,511296	0,293991	27,06086	0,0108641	1,500432
10	**1,500432**	0,010818	25,07781	0,0004314	**1,500001**

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Görüldüğü gibi $x = 1{,}5$'e yakınsamıştır. Aslında $f(x)$ fonksiyonunun 3 durağan noktası bulunmaktadır. Bunlar $x = \frac{2}{3}$, $x = \frac{13}{12}$ ve $x = \frac{3}{2}$ noktalarıdır. Diğer noktaları bulmak için farklı başlangıç noktaları seçmek gerekirdir.

***3 tane opt. Nokta adayı bulunduğunda? Hangisi gerçek optimum olur?

1-Bu 3 nokta ana fonksiyonda konularak fonksiyonun değerleri bulunur.

2-Maks. ise en büyük fonksiyon değerini, min. ise en küçük fonksiyon değerini veren nokta Optimum Nokta dır.

3- Hessien matris yolu ile de yeter şart kullanılarak optimum noktalar belirlenebilir.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Hessian Matrisi;

- f(x) fonksiyonunun ikinci derece kısmı türevini içeren matris Hessian matrisi olarak adlandırılır ve aşağıda verildiği gibi gösterilir.

$$\mathbf{H}f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Örnek: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

3 boyutlu fonksiyonu için hessian matrisini oluşturalım.

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\mathcal{H}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Örnek: $f(x, y, z) = \sin(xyz)$ fonksiyonu için hessian matrisini oluşturalım.

Çözüm:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy\cos(xyz)$$

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2 z^2 \sin(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 z^2 \sin(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -x^2 y^2 \sin(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -xyz^2 \sin(xyz) + z\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -xy^2 z \sin(xyz) + y\cos(xyz)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -x^2 yz \sin(xyz) + x\cos(xyz)$$

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

$$\mathcal{H}(x,y,z)=\begin{bmatrix} -y^2z^2\sin(xyz) & -xyz^2\sin(xyz)+z\cos(xyz) & -xy^2z\sin(xyz)+y\cos(xyz) \\ -xyz^2\sin(xyz)+z\cos(xyz) & -x^2z^2\sin(xyz) & -x^2yz\sin(xyz)+x\cos(xyz) \\ -xy^2z\sin(xyz)+y\cos(xyz) & -x^2yz\sin(xyz)+x\cos(xyz) & -x^2y^2\sin(xyz) \end{bmatrix}$$

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

- $f(x) = (3x-2)^2(2x-3)^2$ fonksiyonu için Newton Raphson yöntemi ile MATLAB da kökleri bulan kodu yazalım.

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Command Window

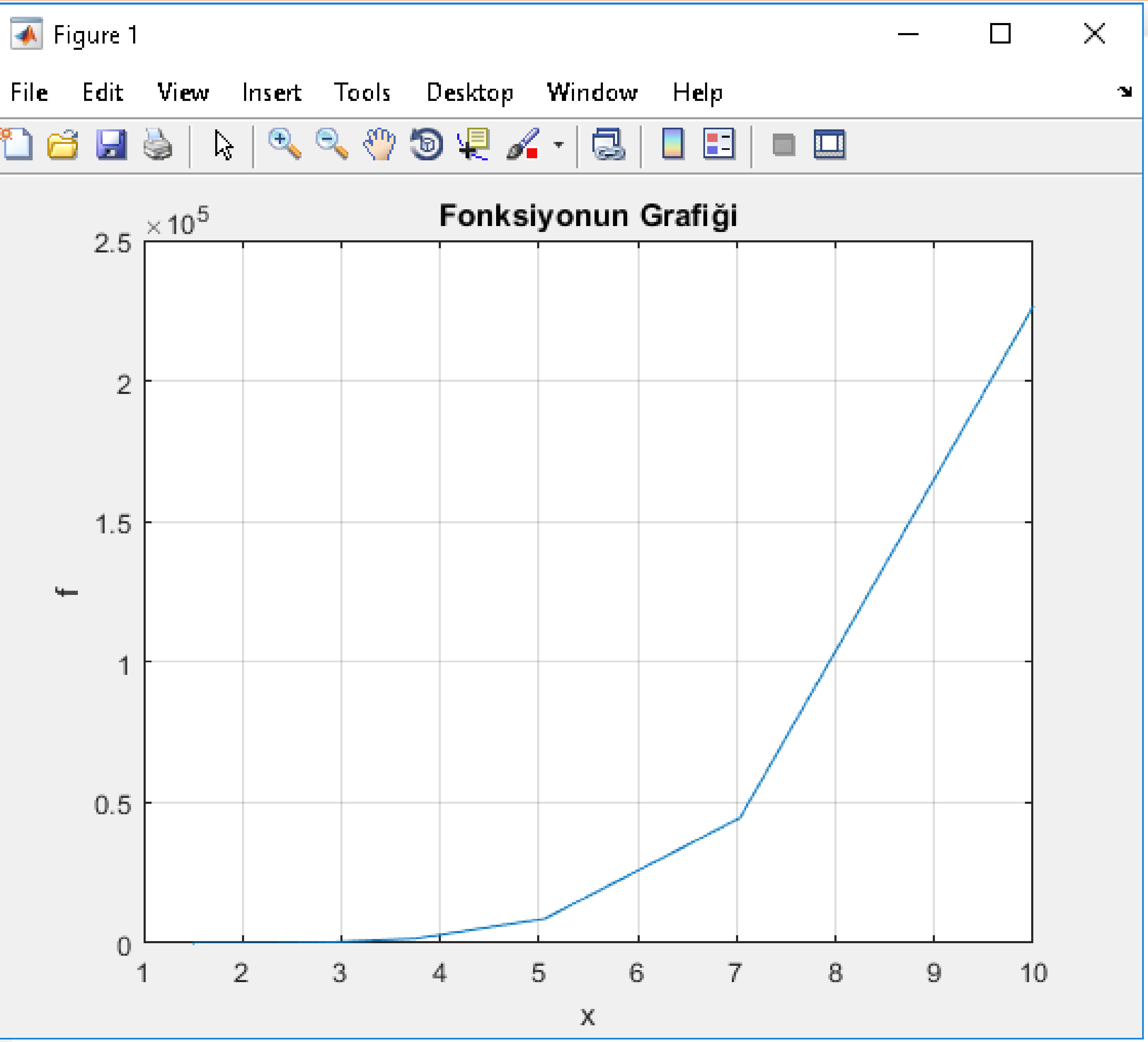
```
>> % Newton-Raphson Extremum Nokta Bulma Yöntemi
% f = Amaç Fonksiyonu
% df = amaç fonksiyonunun türevi
% d2f= amaç fonksiyonunun ikinci türevi
% x0 = f in aranan ekstremum nokta x'in başlangıç değeri
% k = işlem adım(iterasyon) sayısı
% y = fonksiyonun değeri
% f = (3x-2)^2(2x-3)^2 fonksiyon
% df= 72x^3-234x^2+241x-78
% d2f= 216x^2-468x+241
clear
clc
clf
x0 = 10;
k=1;
x(k)= x0;
f(k)  = (3*x(k)-2)^2*(2*x(k)-3)^2;
df(k)= 72*x(k)^3-234*x(k)^2+241*x(k)-78;
d2f(k)  = 216*x(k)^2-468*x(k)+241;
format shortg
for k=2:15
 x(k)=x(k-1)-(df(k-1)/d2f(k-1));
 f(k)  = (3*x(k)-2)^2*(2*x(k)-3)^2;
 df(k)  = 72*x(k)^3-234*x(k)^2+241*x(k)-78;
 d2f(k)  = 216*x(k)^2-468*x(k)+241;
 % Hatay(k)=abs(df(k)-df(k-1));
end
```

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

Command Window

```
x(k)= x0;
f(k)  =  (3*x(k)-2)^2*(2*x(k)-3)^2;
df(k)= 72*x(k)^3-234*x(k)^2+241*x(k)-78;
d2f(k)  = 216*x(k)^2-468*x(k)+241;
format shortg
for k=2:15
 x(k)=x(k-1)-(df(k-1)/d2f(k-1));
 f(k)  =  (3*x(k)-2)^2*(2*x(k)-3)^2;
 df(k)  = 72*x(k)^3-234*x(k)^2+241*x(k)-78;
 d2f(k)  = 216*x(k)^2-468*x(k)+241;
 % Hatay(k)=abs(df(k)-df(k-1));
end
 disp(' ')
disp(' ----------------------------')
disp(' (3x-2)^2(2x-3)^2 Fonksiyonunun ')
disp(' Newton Raphson ile ')
disp(' Ekstramum Noktasının Bulunması')
CIKIS=[x' f' df' d2f'];
disp(' ----------------------------')
disp(' x f df d2f')
disp(' ------------------------------------------------------')
disp(CIKIS)
disp(' ------------------------------------------------------')
clf
plot(x, f )
title('Fonksiyonun Grafiği')
 grid
xlabel('x')
ylabel('f')
```

LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ



Teşekkürler.

Dersin Sonu

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr/