KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ

Bilgisayar Mühendisliğinde Matematik Uygulamaları

6. Hafta

Yrd. Doç. Dr. A. Burak İNNER

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Lineer bir denklem sisteminin çözülerek bilinmeyen x_i değerlerinin bulunmasında değişik yöntemler kullanılır. Bu yöntemler 2 grup halinde ayrılabilir.

1-) Analitik (Direkt) Yöntemler: Denklem sisteminin çözümünü matematik anlamda tam olarak veren yöntemlerdir. Bu yöntemler sayesinde doğrudan aranan çözüm elde edilir.

- Matris Tersi Yöntemi
- Cramer Yöntemi
- Eliminasyon Yöntemi
- Gauss Eliminasyon Yöntemi
- Gauss-Jordan Yöntemi
- LU Ayırma Yöntemi

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

2-) İteratif (Dolaylı) Yöntemler: Çözümü bulmak için öncelikle tahmini değerlerden başlanır ve adım adım ardışık hesaplamalarla belirli tolerans sınırları içinde aranan çözüme ulaşılır.

- Basit İterasyon (Jacobi) Yöntemi
- Gauss-Seidel Yöntemi
- Rölaksasyon (SOR) Yöntemi

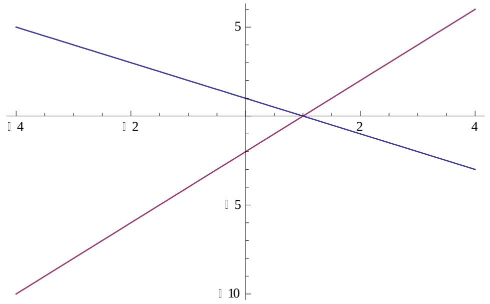
LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

- 2 bilinmeyenli lineer denklem sistemleri için olası durumlar;

$$x + y = 1$$
$$2x - y = 2$$

Unique Solution

These two lines intersect in a single point.

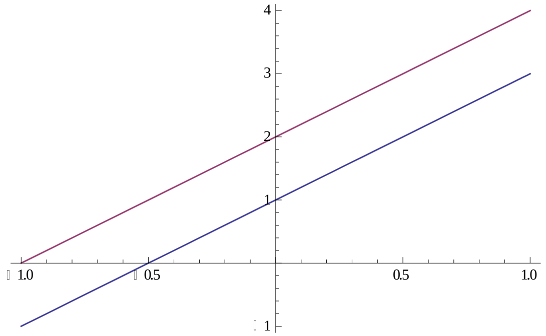


$$4x - 2y = 2$$
$$2x - y = 2$$

No Solution

Here the lines are parallel, so never intersect.

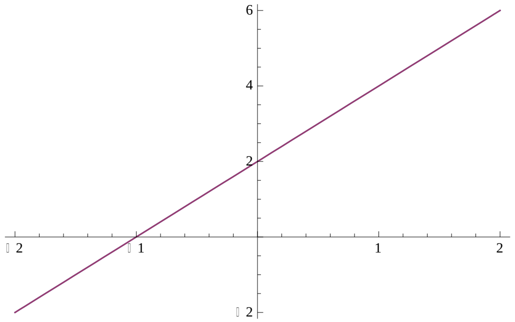
In this case we call the system inconsistent.



$$4x - 2y = 4$$
$$2x - y = 2$$

Infinitely many solutions

The two lines coincide in this case, so they have an infinite number of intersection points.



LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

- Cramer methodu: (Cramer's rule)

The system of equations above can be written in a matrix form as:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$[x]=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad and \quad [B]=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

If $D \neq 0$, then the system has a unique solution as shown below (Cramer's Rule).

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Determinantlar;

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Örnek:

$$2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 36$$

$$-3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 7$$

$$5x_1 + 3x_2 - 8x_3 = -31$$

$$[A][x] = [B]$$

where

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & -8 \end{bmatrix} \qquad [x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \; and \; [B] = \begin{bmatrix} 36 \\ 7 \\ -31 \end{bmatrix}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

$$D=\begin{vmatrix}2 & -4 & 5\\ -3 & 5 & 7\\ 5 & 3 & -8\end{vmatrix}=-336 \qquad D_1=\begin{vmatrix}36 & -4 & 5\\ 7 & 5 & 7\\ -31 & 3 & -8\end{vmatrix}=-672$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 36 & 5\\ -3 & 7 & 7\\ 5 & -31 & -8\end{vmatrix}=1008 \qquad D_3=\begin{vmatrix}2 & -4 & 36\\ -3 & 5 & 7\\ 5 & 3 & -31\end{vmatrix}=-1344$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-672}{-336} = 2$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1008}{-336} = -3$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-1344}{-336} = 4$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Denklem sistemini MATLAB da Cramer yöntemi ile çözelim;

Command Window

```
>> A=[2 -4 5;-3 5 7;5 3 -8]

A =

     2    -4     5
    -3     5     7
     5     3    -8

>> B=[36;7;-31]

B =

    36
     7
   -31
```

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Command Window

```
>> A=[2 -4 5;-3 5 7;5 3 -8];
>> B=[36;7;-31];
>> for i=1:3
D=A
D(:,i)=B
x(i,1)=det(D)/det(A)
end

x =

    2.0000
   -3.0000
    4.0000
```

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Gauus eliminasyon:

Değişkenlerin yok edilmesi ilkesine dayanan bu yöntemde öncelikle katsayılar matrisi alt/üst üçgensel hale dönüştürülür. Daha sonra çözüm vektörü hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

Bu yöntemde katsayılar matrisindeki köşegen elemanlar mutlak değerce maksimum olacak şekilde satırların yer değiştirilmesi (pivotlama) gerekir. Böylece yuvarlatma hataları azalır ve köşegendeki sıfır rakamı kalmayacağından dolayı sıfıra bölme hatası da oluşmaz.

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Örnek:

$$5x-2y-3z=4$$
$$-5x+7y-2z=-10$$
$$-3x-3y+8z=6$$

denklem sistemindeki bilinmeyenleri bulunuz.

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

1. x değerleri yalnız bırakılır.

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
5x & - & 2y & - & 3z & = & 4 & /\ 5 \\
-5x & + & 7y & - & 2z & = & -10 & /\ -5 \\
-3x & - & 3y & + & 8z & = & 6 & /\ -3
\end{array}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & - & \frac{2}{5}y & - & \frac{3}{5}z & = & \frac{4}{5} \\
x & - & \frac{7}{5}y & + & \frac{2}{5}z & = & 2 \\
x & + & y & - & \frac{8}{3}z & = & -2
\end{array}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

2. 2. ve 3. eşitliklerden 1. eşitlik çıkarılarak *x*'den kurtulunur.

$$\begin{aligned} x - \frac{2}{5}y - \frac{3}{5}z &= \frac{4}{5} \\ -y + z &= \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5}y - \frac{31}{15}z &= -\frac{14}{5} \end{aligned}$$

3. 2. eşitlik -1'e ve 3. eşitlik 7/5'e bölünerek tekrar yazılır.

$$\begin{aligned} x - \frac{2}{5}y - \frac{3}{5}z &= \frac{4}{5} \\ y - z &= -\frac{6}{5} \\ y - \frac{31}{21}z &= -2 \end{aligned}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

4. 3. eşitlikten 2. eşitlik çıkarılarak *y*'den kurtulunur.

$$\begin{aligned} x - \frac{2}{5}y - \frac{3}{5}z &= \frac{4}{5} \\ y - z &= -\frac{6}{5} \\ -\frac{10}{21}z &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

5. 3. eşitlikten *z* hesaplanır.

$$z = \frac{84}{50}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

6. *z*, 2. eşitlikte yerine koyulur ve *y* hesaplanır.

$$y-\frac{84}{50}=-\frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{24}{50}$$

7. *y* ve *z*, 1. eşitlikte yerine koyulur ve l_1 hesaplanır.

$$x-\frac{2}{5}\left(\frac{24}{50}\right)-\frac{3}{5}\left(\frac{84}{50}\right)=\frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad x=2$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

- LU yöntemi:

LU decomposition was originally derived as a decomposition of quadratic and bilinear forms. Lagrange, in the very first paper in his collected works(1759) derives the algorithm we call Gaussian elimination. Later Turing introduced the *LU* decomposition of a matrix in 1948 that is used to solve the system of linear equation.

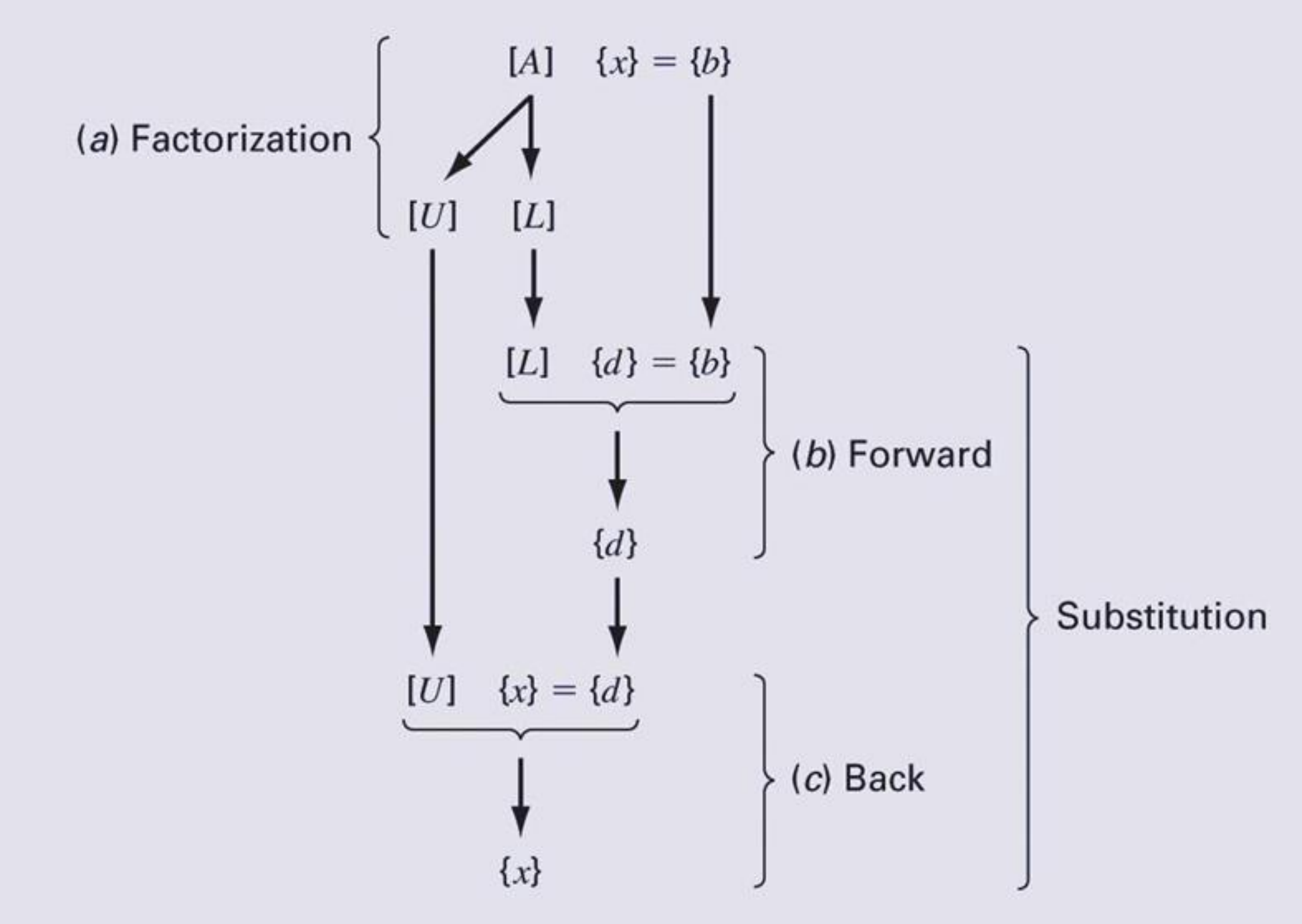
Let A be a $m \times m$ with nonsingular square matrix. Then there exists two matrices L and U such that, where L is a lower triangular matrix and U is an upper triangular matrix.

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1m} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{mm} \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mm} \end{bmatrix}$$

$$A = LU$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2



LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Equating the elements of the First Row :-

$$L_{11}U_{11} = A_{11} \qquad L_{11}U_{12} = A_{12} \qquad L_{11}U_{13} = A_{13}$$

Equating the elements of the 2nd Row :-

$$L_{21}U_{11} = A_{21} \qquad L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} = A_{22}$$

$$L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} = A_{23}$$

Equating the elements of the 3rd Row :-

$$L_{31}U_{11} = A_{31} \qquad L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} = A_{32}$$

$$L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33} = A_{33}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Örnek:

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 6$$
$$-x_1 + 6x_2 + x_3 = -6$$
$$x_1 + x_2 + 8x_3 = 8$$

denklem sistemini LU yöntemi ile çözünüz.

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$Ax = B$$

$$LUx = B \ , \ Ux = Y$$

$$LY = B$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} \\ l_{21} & l_{21}u_{12}+l_{22} & l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12}+l_{32} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33} \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = 4$$

$$l_{11}u_{12} = -1, u_{12} = -\frac{1}{4}$$

$$l_{11}u_{13} = 1, u_{12} = \frac{1}{4}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

$$l_{21}u_{12}+l_{22}=6,\quad \frac{1}{4}+l_{22}=6,\quad l_{22}=\frac{23}{4}$$

$$l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23}=1,\quad -\frac{1}{4}+\frac{23}{4}u_{23}=1,\quad u_{23}=\frac{5}{23}$$

$$l_{31}=1,$$

$$l_{31}u_{12}+l_{32}=1,\quad -\frac{1}{4}+l_{32}=1,\ l_{32}=\frac{5}{4}$$

$$l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33}=8,\quad \frac{1}{4}+\frac{5}{4}\left(\frac{5}{23}\right)+l_{33}=8,\quad l_{33}=\frac{172}{23}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{23}{4} & 0 \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{172}{23} \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

$$LY = B, \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{23}{4} & 0 \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{172}{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$4y_1 = 6, \quad y_1 = \frac{3}{2}$$

$$-y_1 + \frac{23}{4} y_2 = -6, \quad -\frac{3}{2} + \frac{23}{4} y_2 = -6, \quad y_2 = -\frac{18}{23}$$

$$y_1 + \frac{5}{4} y_2 + \frac{172}{23} y_3 = 8, \quad -\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\left(-\frac{18}{23}\right) + \frac{172}{23} y_3 = 8, \quad y_3 = 1$$

$$y_1 = \frac{3}{2}, \quad y_2 = -\frac{18}{23}, \quad y_3 = 1$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

$$Ux = Y, \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -18/23 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 1,$$

$$x_2 + \frac{5}{23}x_3 = -\frac{18}{23}, \quad x_2 = -1$$

$$x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Command Window

```
>> A = [ 1     2     3
         4     5     6
         7     8     0 ];
>> [L1,U] = lu(A)

L1 =

    0.1429    1.0000         0
    0.5714    0.5000    1.0000
    1.0000         0         0


U =

    7.0000    8.0000         0
         0    0.8571    3.0000
         0         0    4.5000
```

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Command Window

```
>> L1*U

ans =

     1     2     3
     4     5     6
     7     8     0

>> X = inv(U)*inv(L1)

X =

   -1.7778    0.8889   -0.1111
    1.5556   -0.7778    0.2222
   -0.1111    0.2222   -0.1111
```

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Command Window

```
>> [L2,U,P] = lu(A)

L2 =

    1.0000         0         0
    0.1429    1.0000         0
    0.5714    0.5000    1.0000


U =

    7.0000    8.0000         0
         0    0.8571    3.0000
         0         0    4.5000


P =

     0     0     1
     1     0     0
     0     1     0
```

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ 2

Command Window

```
>> %L2 = P*L1
>> P*L1

ans =

    1.0000         0         0
    0.1429    1.0000         0
    0.5714    0.5000    1.0000

>> P*A - L2*U

ans =

     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

Teşekkürler.

Dersin Sonu

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr