KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ

Bilgisayar Mühendisliğinde Matematik Uygulamaları

4. Hafta

Yrd. Doç. Dr. A. Burak İNNER

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

EIGENVECTORS AND EIGENVALUES

Özdeğerler ve özvektörler

Bir skaler

$$Ax = \lambda x$$

Bir matris — Bir vektör

$A : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ $\qquad$ $x \in \mathcal{R}^n$

Lineer bir dönüşüm

λ ve x, A için özel bir skaler ve vektör

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

Özdeğer ve özvektör

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖR NEDİR?

Özdeğerler, bir matrisin orijinal yapısını görmek için kullanılan alternatif bir yoldur.

Özdeğer kavramını açıklamak için öncelikle özvektör kavramı ele alınsın.

Bazı vektörler bir **A** matrisi ile çarpıldıkları zaman yön değiştirir, bazıları ise değiştirmezler. Bazı özel **x** vektörleri, A**x** vektörü ile aynı yönde kalmaktadır. İşte bu vektörlere "özvektörler" denir.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Bir özvektörün **A** matrisi ile çarpımı olan A**x** vektörü, orijinal **x** vektörünün

$\lambda \in \Re$ olmak üzere λ katıdır.

Sonuç olarak temel denklem $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ şeklindedir. Burada λ skaleri **A** matrisinin bir özdeğeridir. Bu skaler, özvektörün **A** matrisi ile çarpılması halinde elde edilen yeni vektörün uzunluğunun, orijinal **x** vektörüne göre büyüdüğü, küçüldüğü ya da aynı kalıp kalmadığı bilgisini vermektedir. Özdeğer sıfır değerini alabilir. Bu durumda $\mathbf{Ax} = 0\mathbf{x}$ olur ve özvektör **x**, sıfır uzayında tanımlıdır.

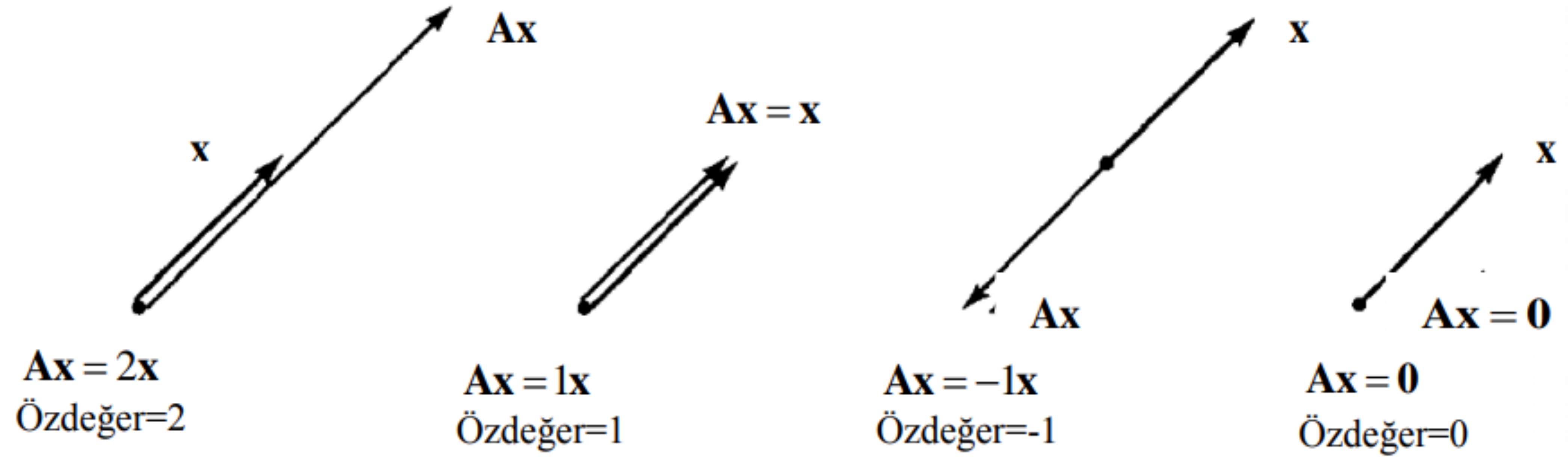
EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Eğer **A** birim matris ise, $\mathbf{Ix} = \mathbf{x}$ olur. Bu durumda $n \times 1$ boyutlu tüm vektörler özvektördür ve **A** matrisinin tüm özdeğerleri $\lambda = 1$ 'dir.

A matrisinin $T : \Re^n \to \Re^n$ şeklinde bir doğrusal dönüşümün tanım matrisi olduğu varsayılsın.

Bu durumda $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ eşitliği sağlanıyorsa $T(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ olur. Bunun anlamı, eğer **x**, **A** matrisinin özvektörü ise T dönüşümünün sonucunda **x** vektörünün görüntüsü bir skalerle çarpımı olan $\lambda \mathbf{x}$ vektörüdür.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR



EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Tanım: ***Özdeğer, Özvektör***

A bir $n\times n$ boyutlu kare matris olsun. Eğer λ bir skaler ve **x** vektörü de sıfır olmayan, $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, bir sütun vektörü olmak üzere,

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$$

eşitliği sağlanıyorsa **x** vektörü, **A** matrisinin özvektörü, λ skaleri de **A** matrisinin özdeğeridir. Aynı zamanda **x**, λ özdeğerine karşılık gelen özvektördür.

Bir skaler olan λ, $n\times n$ boyutlu **A** matrisi için $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ denkleminde **x**'in sonsuz çözümü olduğu durumda bir özdeğer tanımlar.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Temel Özellikler

- Özdeğer λ sıfır değerini alabilirken, özvektör $\mathbf{x}$ asla sıfır vektörü olamaz.
- Özdeğer sıfır olduğunda $\mathbf{Ax} = 0\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$ matrisinin tersi alınamaz.
- Boyutu $n \times n$ olan bir $\mathbf{A}$ matrisinin tersinin alınabilir olması için tüm özdeğerlerinin sıfırdan farklı olması gerekir.

Tanım: *Öz Uzay*

Boyutu $n \times n$ olan bir $\mathbf{A}$ matrisi için öz uzay, $\mathbf{A}$ matrisinin her bir özdeğerine karşılık gelen tüm özvektörlerin oluşturduğu kümedir

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Teorem: ***Özdeğerlerin Sayısı***

Eğer λ, $n \times n$ boyutlu **A** matrisinin özdeğeri ve **x** vektörü de bu **A** matrisinin özvektörü ise, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ olmak üzere, $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eşitliğinde $det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0$ 'ı sağlayacak şekilde, **A**'nın en fazla n adet farklı özdeğeri bulunur.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denkleminin sonsuz çözümü sadece ve sadece $det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0$ olduğunda ya da diğer bir deyişle $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n$ matrisinin tersi alınamaz olduğu durumda vardır. Çünkü bu matrisin tersinin alınamaması demek her bir sütunda pivot elemanın olmaması ve dolayısıyla homojen denklem sisteminin sonsuz çözümünün olması demektir. Bu durumun aksine $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n$'nin tersi alınabiliyorsa, ortaya çıkan tek çözüm sıfır çözümdür.

Sonuç olarak **A** matrisinin özdeğerlerini bulabilmek için $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homojen denklem sisteminin sonsuz çözümünün olması gerekmektedir

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Teorem:*Özdeğer ve Determinant*

Bir matrisin özdeğerlerinin çarpımı, matrisin determinantına eşittir.

Teorem: *Özdeğer ve İz*

Özdeğerlerin toplamı matrisin izine eşittir.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = trace = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Sonuç olarak özdeğerlerlerin toplamları ve çarpımları matrisin kendisi

üzerinden hesaplanabilir.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Teorem: ***Sıfır Özdeğeri ve Determinant***

Boyutu $n \times n$ olan bir **A** matrisinin sadece ve sadece determinantı sıfır olduğunda tersi alınamaz. Özdeğerlerden en az biri sıfır ise bu determinant sıfır değerini alır.

Tekil matrislerin en az bir özdeğeri sıfırdır.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Matrislerin Toplamlarının ve Çarpımlarının Özdeğerleri:

λ, **A** matrisinin özdeğeri, β da **B** matrisinin özdeğeri olmak üzere, **AB** matrisinin özdeğeri $\lambda.\beta$ değildir. Bu eşitliğin geçerli olabilmesi için **A** ve **B**'nin aynı **x** özvektörüne sahip olmaları gerekir. Aynı şekilde **A+B**'nin özdeğeri de $\lambda + \beta$ değildir.

Eğer **x**, hem **A** hem de **B** matrisinin özvektörü ise $\mathbf{ABx} = \lambda\beta\mathbf{x}$ eşitliği geçerlidir. Bazı durumlarda tüm özvektörler ortaktır. Bunun sağlanabilmesi için **AB=BA** olmalıdır.

KARAKTERİSTİK DENKLEM

Tanım: ***Karakteristik Denklem, Karakteristik Polinom***

$det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_n)=0$ denklem sistemine **A** matrisinin karakteristik denklemi,

$det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_n)=0$ polinomuna da karakteristik polinomu denir. **A** matrisinin

özdeğerleri, karakteristik polinomun kökleridir.

Karakteristik denklem sadece λ değerlerini içerir, *x* değerlerini içermez.

2×2'lik bir $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi için karakteristik polinom

$$\lambda^2-(trace\mathbf{A})\lambda+\det\mathbf{A}$$

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

ÖZDEĞERLERİN BULUNMASI

erhangi bir $n \times n$ boyutlu matris için özdeğerler hesaplanırken şu adımlar izlenmelidir:

1. $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n$ determinantı hesaplanır. Bu determinantın sonucu λ^n ya da $-\lambda^n$ ile başlayan, n-inci dereceden bir polinomdur.
2. $det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = 0$ için polinomun kökleri bulunur. Bulunan n adet kök, **A** matrisinin n adet özdeğerini tanımlar. Ayrıca bu değerler $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n$'yı tekil hale getirir.
3. Her bir λ değeri için $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ çözülerek özvektör **x** bulunur.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Eğer $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}_n)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ işleminin sonucunda $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ sonucu bulunuyorsa, λ özdeğer değildir.

Örnek:

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.

1.adım: A matrisinin karakteristik denklemi

$$\mathbf{A}=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$\lambda^2-4\lambda+3=0$ ya da $(\lambda-1)(\lambda-3)=0$.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

2. adım: Bu denklemin köklerinden özdeğerler, $\lambda = 1$ ve $\lambda = 3$ bulunur.

3.adım: Özvektör denklemi $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$(2-\lambda)x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0$$

Bu bir homojen denklem sistemi olduğu için mutlaka bir çözüm vardır.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

$\lambda = 1$ için,

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 0$$

Burada $\lambda = 1$ 'e karşılık gelen özvektör, $x_2 \neq 0$ için,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olup, $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ şeklinde bir öz uzay tanımlar.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

$\lambda = 3$ için,

$$-x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0$$

Burada $\lambda = 3$ 'e karşılık gelen özvektör, $x_2 \neq 0$ için,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olup, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ şeklinde bir öz uzay tanımlar.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Tanım: ***Benzer (Similar) Matrisler***

A ve **B** $n \times n$ boyutlu iki matris olmak üzere, $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}$ şeklinde tanımlanmış ve tersi alınabilir bir **P** matrisi mevcutsa bu iki matris benzer matrislerdir.

Teorem:

Eğer $n \times n$ boyutlu iki matris benzer matris ise, karakteristik denklemleri ve buna bağlı olarak da özdeğerleri birbirine eşittir.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Example: Find the eigenvalues and associated eigenvectors of the matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 18 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

First we compute $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ via a cofactor expansion along the second column:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & -3 \\ -9 & -2-\lambda & 3 \\ 18 & 0 & -8-\lambda \end{vmatrix} &= (-2-\lambda)(-1)^4 \begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 \\ 18 & -8-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(2+\lambda)[(7-\lambda)(-8-\lambda)+54] \\
&= -(\lambda+2)(\lambda^2+\lambda-2) \\
&= -(\lambda+2)^2(\lambda-1).
\end{aligned}$$

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Thus $\mathbf{A}$ has two distinct eigenvalues, $\lambda_1 = -2$ and $\lambda_3 = 1$. (Note that we might say $\lambda_2 = -2$, since, as a root, -2 has multiplicity two. This is why we labelled the eigenvalue 1 as λ_3.)

Now, to find the associated eigenvectors, we solve the equation $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for $j = 1, 2, 3$. Using the eigenvalue $\lambda_3 = 1$, we have

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 6x_1 - 3x_3 \\ -9x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ 18x_1 - 9x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \quad x_3 = 2x_1 \qquad \text{and} \qquad x_2 = x_3 - 3x_1 \\
&\Rightarrow \quad x_3 = 2x_1 \qquad \text{and} \qquad x_2 = -x_1.
\end{aligned}
$$

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

So the eigenvectors associated with $\lambda_3 = 1$ are all scalar multiples of

$$\mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Now, to find eigenvectors associated with $\lambda_1 = -2$ we solve $(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. We have

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 9x_1 - 3x_3 \\ -9x_1 + 3x_3 \\ 18x_1 - 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \quad x_3 = 3x_1. \end{aligned}$$

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Something different happened here in that we acquired no information about x_2. In fact, we have found that x_2 can be chosen arbitrarily, and independently of x_1 and x_3 (whereas x_3 cannot be chosen independently of x_1). This allows us to choose two linearly independent eigenvectors associated with the eigenvalue $\lambda = -2$, such as $\mathbf{u_1} = (1, 0, 3)$ and $\mathbf{u_2} = (1, 1, 3)$. It is a fact that all other eigenvectors associated with $\lambda_2 = -2$ are in the span of these two; that is, all others can be written as linear combinations $c_1\mathbf{u_1} + c_2\mathbf{u_2}$ using an appropriate choices of the constants c_1 and c_2.

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

- Eigenvalue and eigenvector in MATLAB; eig(A)

MathWorks®

Documentation

CONTENTS Close

‹ Documentation Home

‹ MATLAB

‹ Mathematics

‹ Linear Algebra

‹ MATLAB

‹ Functions

eig

ON THIS PAGE

Syntax

eig

Eigenvalues and eigenvectors

Syntax

```
e = eig(A)
[V,D] = eig(A)
[V,D,W] = eig(A)
```

```
e = eig(A,B)
[V,D] = eig(A,B)
[V,D,W] = eig(A,B)
```

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

Command Window

```
>> B=[1 4 7;2 7 6;8 5 4]

B =

     1     4     7
     2     7     6
     8     5     4

>> eig(B)

ans =

   14.9458
   -5.0981
    2.1524
```

EIGENVALUE AND EIGENVECTOR

```
>> [V,lambda]=eig(B)

V =

   -0.4896   -0.6575    0.3700
   -0.6006   -0.2447   -0.7791
   -0.6322    0.7126    0.5061


lambda =

   14.9458         0         0
         0   -5.0981         0
         0         0    2.1524

>>
```

HAFTA 4 (Özdeğer – Özvektör) ÖRNEKLER 1

1) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi için a) karakteristik denklem b) özdeğer, özvektörleri bulun

a) $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \text{(kar. denk.)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3}_{\text{özdeğerler}}$$

b) $(A - \lambda I)x = 0$, λ'ya karşılık gelen özvektörleri verir.

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* $\lambda_1 = 2$ için; $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 = -a_2 \end{matrix}$

r herhangibir sayı olsun.

$a_1 = r \quad a_2 = -r$ dir.

$$x_1 = \begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}$$

* $\lambda_2 = 3$ için; $\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow b_1 = 0 \quad b_2 = r$ (r herhangi sayı)

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

2

2) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

$$(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} (3-\lambda) & -1 & 0 \\ -1 & (2-\lambda) & -1 \\ 0 & -1 & (3-\lambda) \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 19\lambda + 12 = 0 \qquad (1,3,4)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

$\lambda_1 = 1$ için;

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} r \\ 2r \\ r \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} \boxed{x_1 + x_3 = x_2} \\ -x_1 - x_3 = -2x_3 \\ -x_1 = -x_3 \\ \boxed{x_1 = x_3} \end{matrix}$$

$\lambda_2 = 3$ için;

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} -r \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} \boxed{x_2 = 0} \\ \boxed{-x_1 = x_3} \end{matrix}$$

$\lambda_3 = 4$ için;

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = \begin{bmatrix} r \\ -r \\ r \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} \boxed{-x_1 = x_2} \\ \boxed{-x_2 = x_3} \end{matrix}$$

Teşekkürler.

Dersin Sonu

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr