KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ

Bilgisayar Mühendisliğinde Matematik Uygulamaları

3. Hafta

Yrd. Doç. Dr. A. Burak İNNER

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr

MATRİSLER

- Vektörün normu (boyutu):

Bir **u** vektörünün uzunluğu vektör elemanlarının karelerinin toplamının kareköküdür ve $|\mathbf{u}|$ ile tanımlanır:

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Uzunluk skaler bir değerdir.

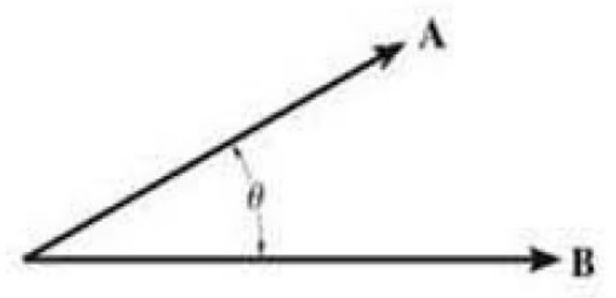
Command Window

```
>> u=[3 1 -2 0 -1];
>> norm(u)

ans =

    3.8730
```

MATRİSLER

Nokta (skaler) Çarpım: (dot product)

- İki doğru arasındaki açının, veya bir kuvvetin bir doğruya paralel ve dik bileşenlerinin bulunması gerekebilir.
- İki boyutlu problemlerde trigonometri ile çözülebilir, ancak 3 boyutluda çözüm için vektör yöntemleri uygulanmalıdır.
- Skaler çarpım, iki vektörün çarpımı için özel bir yöntemdir.
- **A** ve **B** vektörlerinin skaler çarpımı, **A**·**B** şeklinde yazılır ve **A** skaler çarpım **B** diye okunur. A ve B'nin büyüklükleri ile iki vektör arasındaki açının kosinüsünün çarpımı olarak tanımlanır.
- MATLAB da dot(u,v) komutu kullanılır.

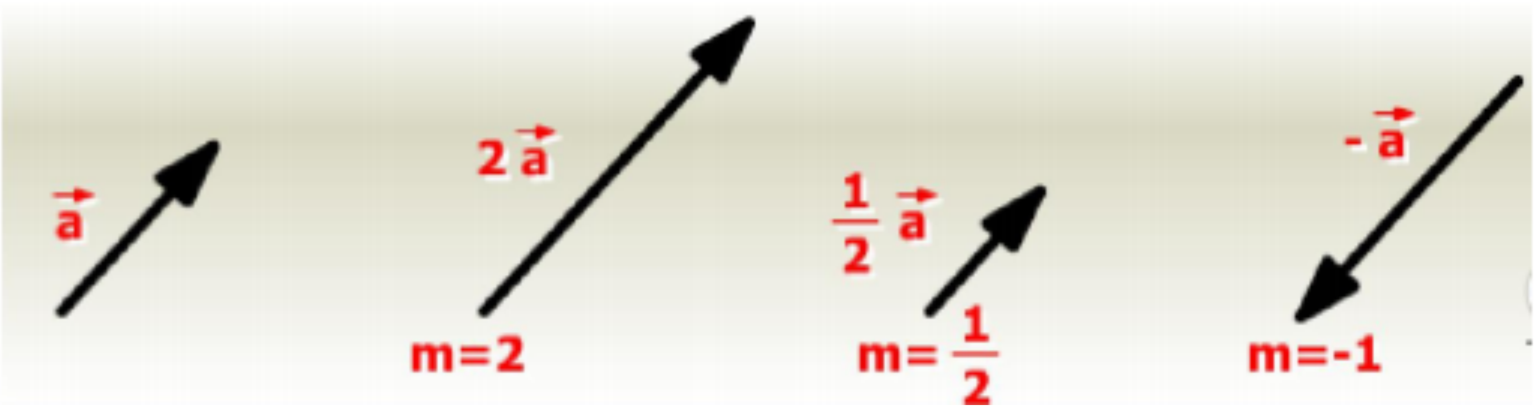


$$A \cdot B = A \cdot B \cos\theta$$

$$0^o \leq \theta \leq 180^o$$

MATRİSLER

- Bu çarpıma skaler çarpım veya nokta çarpım da denir. Bu işlemin kuralları :
  - Değişme özelliği (komütatiflik) $A \cdot B = B \cdot A$
  - Skaler ile çarpım $a(A \cdot B) = (aA) \cdot B = A \cdot (aB)$
  - Dağılma kuralı (distributiflik) $A \cdot (B + D) = (A \cdot B) + (A \cdot D)$



MATRİSLER

- A ve B vektörlerinin, bileşenleri cinsinden;

$$A = A_x j + A_y j + A_z k$$

$$B = B_x i + B_y j + B_z k$$

biçiminde de ifade edilebilir. Buradan, A ile B nin skaler çarpımının

$$A.B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

ya indirgenebileceği görülür.

A = B olan özel durumda; $A.A = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$ olacağı anlaşılır.

MATRİSLER

1.İki vektör birbirine dik (ortogonal) ise θ=π/2 olup skaler çarpım:

$$\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|Cos\theta$$

$$= 0$$

2. İki vektörün yönleri aynı ise θ=0 olup skaler çarpım:

$$\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|Cos\theta$$

$$= |\vec{u}||\vec{v}|$$

3. İki vektörün yönleri zıt ise θ=π olup skaler çarpım:

$$\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|Cos\theta$$

$$= -|\vec{u}||\vec{v}|$$

MATRİSLER

- Birim vektörlerin skaler çarpımı:

$$ii = jj = kk = 1 \quad \text{ve } ij = ik = jk = 0$$

Skaler çarpım sonucu:

$$uv = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

- Genel durum: *n*-boyutlu vektörler için;

$$uv = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

$$= \sum_{r=1}^{n} u_r v_r$$

MATRİSLER

Örnek: A ve B vektörleri, A = 2i + 3j ve B = – i + 2j olarak veriliyor,

a) A.B skaler çarpımını hesaplayınız.

b) A ile B arasındaki Θ açısını bulunuz.

MATRİSLER

Çözüm: a) A.B = (2i + 3j).(-i + 2j)

= - 2i.i + 2i.2j – 3j.i + 3j.2j

= -2(1) + 4(0) – 3(0) + 6(1)

= – 2 + 6 = 4

Burada i.i = j.j = 1 ve i.j = j.i = 0 olduğu kullanıldı.Burada A_x = 2, A_y = 3, B_x = – 1 ve B_y = 2 dir.

Command Window

```
>> u=[2 3];
>> v=[-1 2];
>> dot(u,v)

ans =

     4
```

b) A ve B nin büyüklükleri şöyledir;

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{8.06} = \boxed{60.2°}$$

MATRİSLER

- **Vektörel çarpım (vector product):** Sıfırdan farklı $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ gibi iki vektörün vektörel çarpımı

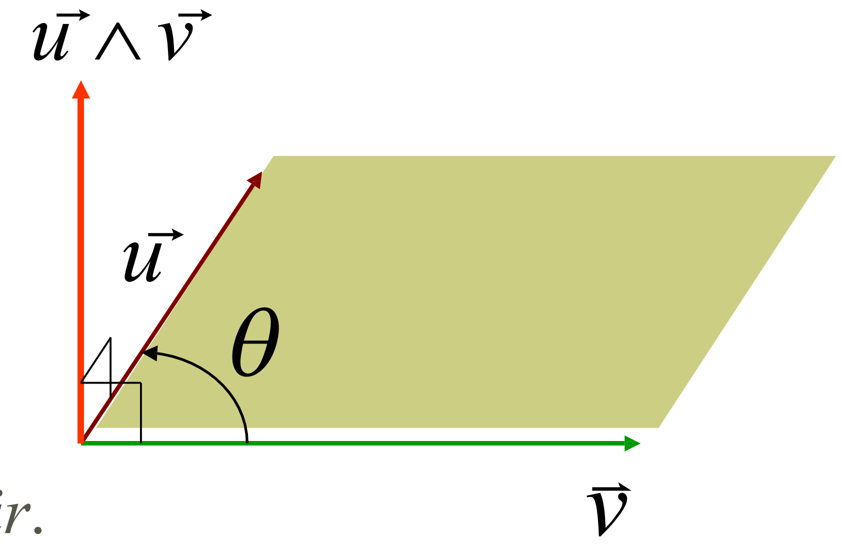
  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ya da $\vec{u} \times \vec{v}$

  ile gösterilir:

  $$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{e}\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| Sin\theta$$

  Vektörel çarpımın sonucu bir *vektördür*.

  Doğrultusu $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerinin oluşturduğu düzleme diktir.



MATRİSLER

- Vektörel çarpımın matris ifadesi;

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}A_y & A_z\\ B_y & B_z\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}A_x & A_z\\ B_x & B_z\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}A_x & A_y\\ B_x & B_y\end{vmatrix}$$

- MATLAB komutu cross(u,v) dir.

MATRİSLER

- Vektörel çarpımın özellikleri;

Her $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \in V$ ve $\alpha \in IR$ olmak üzere;

i) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}$ ve $\vec{b}$ lineer bağımlı ya da $\vec{a}$ veya $\vec{b}$ sıfırdır.

ii) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

iii) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

iv) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

v) $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$ dir.

MATRİSLER

Örnek: $a=(2,1,3)$ ve $b=(1,0,2)$ vektörleri için vektörel çarpımı bulunuz.

MATRİSLER

Çözüm:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (2, 1, 3)$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = (1, 0, 2)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$ eşitliğinden de yararlanabiliriz.

$= (1.2 - 3.0,\ 3.1 - 2.2,\ 2.0 - 1.1)$

$= (2, -1, -1)$ bulunur.

Command Window

```
>> a=[2 1 3];
>> b=[1 0 2];
>> cross(a,b)

ans =

     2    -1    -1
```

MATRİSLER

- **Satır ve sütun işlemleri:**

- A matrisinin herhangi iki satırını(veya sütununu) kendi aralarında yer değiştirmek.

- A matrisinin herhangi bir satırını(veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak.

- A matrisinin herhangi bir satırını(veya sütununu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpıp başka bir satırına (veya sütununa) eklemek.

MATRİSLER

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ matrisine ilkel satır işlemlerini uygulayalım.

A matrisinde 1. satır ile 3. satırın yerleri değiştirildiğinde,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$ matrisi elde edilir.

A_1 matrisinde 2. satır 1/2 sayısı ile çarpılırsa,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$ matrisi elde edilir.

A_2 matrisinde 3. satır -1 ile çarpılıp 2. satıra eklenirse,

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$ matrisi elde edilir.

MATRİSLER

Bir Matrisin BasamakBiçimi:

Bir A matrisinin her bir satırında, sıfırdan farklı bir öğe, içinde bulunduğu satırdan önce gelen satırdaki sıfırdan farklı olan ilk öğenin daha sağında yer alıyorsa A matrisine basamak matris denir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRİSLER

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisini basamak biçime dönüştürelim.

A matrisinin 1. satırını -3 ile çarpıp 2. satırına ve yine 1. satırını -1 ile çarpıp 3. satırına ekleyelim.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elde edilen matrisin 2. satırını -1/2 ile çarpıp 3. satırına ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ matrisi A matrisinin basamak biçimidir.

MATRİSLER

Bir matrisin rankı:

- Bir A matrisi verilsin. A matrisinin basamak biçime dönüştürülmüşü olan matrisin, sıfırdan farklı satırları sayısına A matrisinin rankı denir ve r(A) ile gösterilir.
- Özel olarak, herhangi bir sıfır matrisinin rankı 0 kabul edilir.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ kare matrisinin rankını bulalım.

Çözüm: A matrisinin 1. satırını 2 ile çarpıp 3. satırına ve 1. satırını -1 ile çarpıp 4. satırına ekleyelim.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Elde edilen matriste 3. satır ile 4. satırı yer değiştirelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MATRİSLER

Bu matriste 2. satırı 1/2 ile çarpıp 3. satıra ekleyelim.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinde sıfırdan farklı en az bir eleman içeren satır sayısı 3 olduğundan $r(A)=3$ tür.

Command Window

```
>> A=[1 2 -1 0;0 2 1 2;-2 -4 2 0;-2 -4 2 0;1 1 1 1];
>> rank(A)

ans =

     3
```

MATRİSLER

- Bir matrisin tersi (inverse matrix):

Tanım: **A** boyutu $n \times n$ olan bir kare matris olsun. Eğer

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$$

eşitliğini sağlayan bir **B** matrisi varsa **A** matrisi tersi alınabilir matristir ve **B** matrisine **A** matrisinin ters matrisi denir ve

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

ile gösterilir.

SONUÇ: $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$

MATRİSLER

Ters matris özellikleri;

1. Tersi alınabilir bir **A** matrisinin bir ve yalnız bir ters matrisi vardır
2. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
3. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
4. $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$ k bir skaler
5. $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} Ek\mathbf{A}$

MATRİSLER

6. $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$

7. $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$

$$= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\ldots\mathbf{A}^{-1}$$

MATRİSLER

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi var mıdır?

Çözüm: $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x + z = 1} \\ y + t = 0 \\ \boxed{x + z = 0} \\ y + t = 1 \end{cases}$$

undan tersi yoktur.

MATRİSLER

Command Window

```
>> A=[1 1;1 1];
>> inv(A)
Warning: Matrix is singular to working precision.

ans =

   Inf   Inf
   Inf   Inf
```

MATRİSLER

Örnek: $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ matrisinin tersi var mıdır?

Çözüm:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & y\\z & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

olacak biçimde bir $\begin{bmatrix}x & y\\z & t\end{bmatrix}$ var mıdır? Önceki örnekteki gibi ilerleyelim

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\z & t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+z=1\\y+t=0\\z=0\\t=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\\z=0\\t=1\end{cases}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

MATRİSLER

Command Window

```
>> A=[1 1;0 1];
>> inv(A)

ans =

     1    -1
     0     1
```

MATRİSLER

- Tekil matris (singular matrix):

Tanım: A boyutu $n \times n$ olan kare bir matris olsun. Eğer determinant değeri sıfırdan farklı,

$$|\mathbf{A}| \neq 0$$

ise **A** matrisine *tekil olmayan matris*,

$$|\mathbf{A}| = 0$$

ise **A** matrisine *tekil matris* denir.

MATRİSLER

- **Matrisin eşelon formu (echelon form):**

  - Bir satırın elemanlarının **tümünün sıfır olması**

    yada

  - **1** olan elemanın solundakilerin sıfır olması durumudur.

    (Sağındakiler olmayabilir)

  - Her satırın soldan itibaren sıfırdan farklı **ilk girdisi 1'dir**.

  - Bu şekilde satırlar üzerinde yapılan matematiksel işlemlerle bir matrisin **Eşelon** biçimi elde edilir.

MATRİSLER

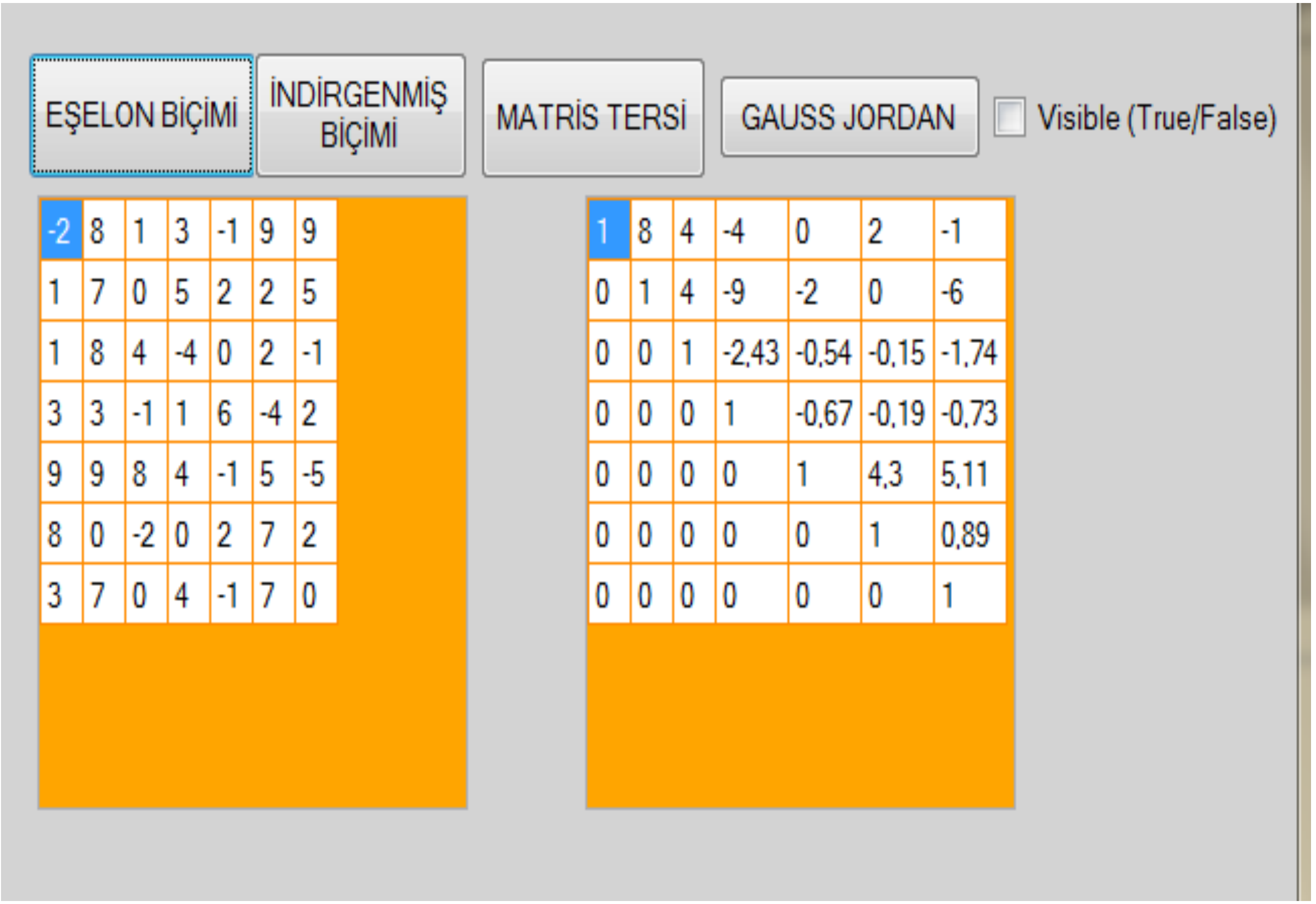
- Aşağıdaki A matrisi için Eşelon biçimini elde ederken gerçekleştirilen işlem aşamalarını inceleyelim.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 7 & -6\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow[-2S1+S2\to S2]{} B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow[1/3\ S2\to S2]{} C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 5 & 4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-5S2+S3\to S3]{} D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 14\end{bmatrix} \xrightarrow[1/14\ S3\to S3]{} E=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Eşelon Matris Uygulaması

3 x 3 Matris



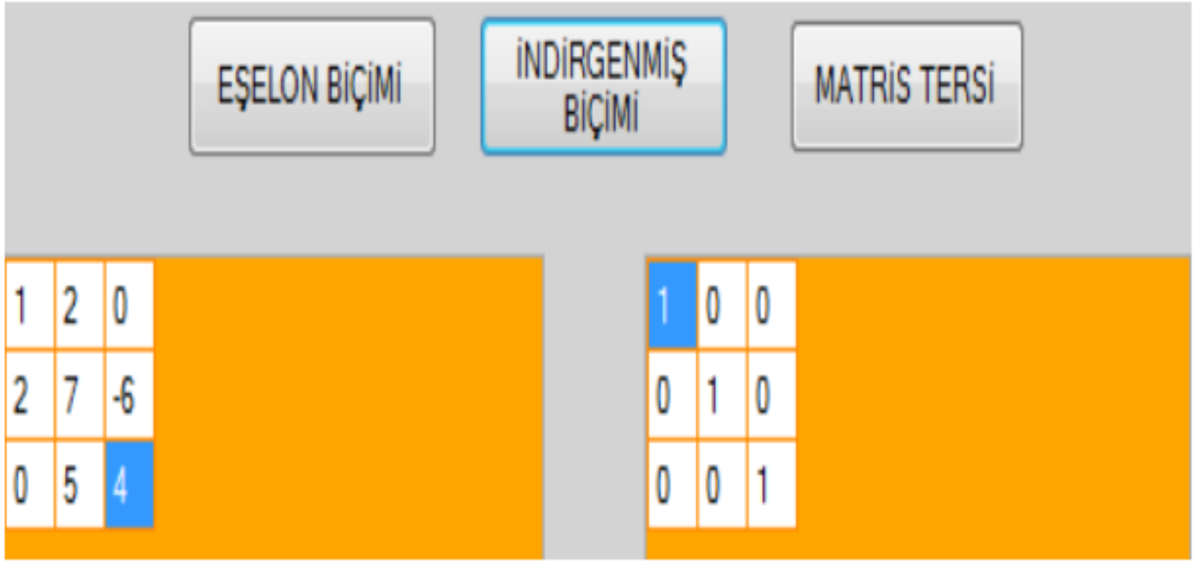
7 x 7 Matris

MATRİSLER

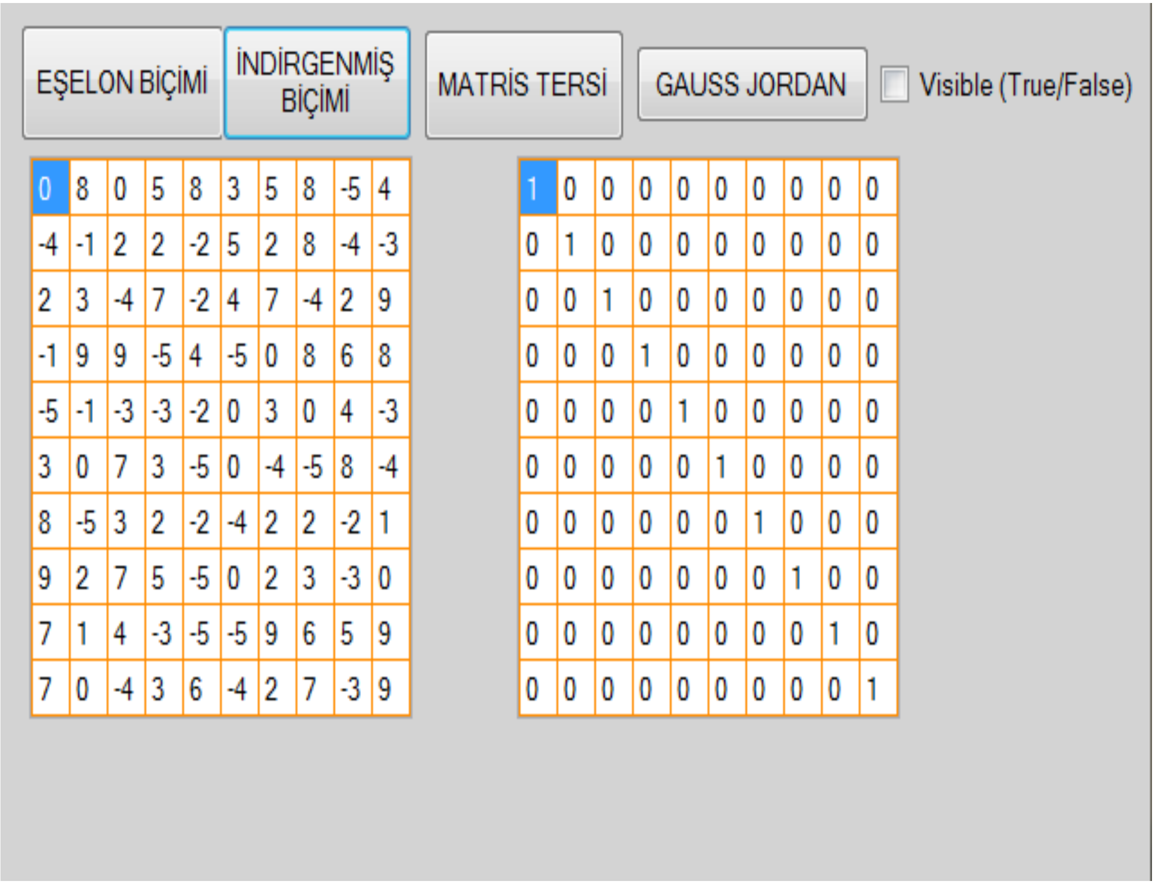
- Matrisinin satırca indirgenmiş durumunu elde ederken **Eşelon** biçim durumundan devam edilir. Ayrıca ek olarak;
- **Tüm girdileri sıfır olan tüm satırlar, sıfırdan farklı girdisi bulunan** satırlardan sonra gelmelidir.
- Bir satırın sıfırdan farklı ilk girdisinin bulunduğu sütun, **kendisinden önceki satırın sıfırdan farklı ilk girdisinin** bulunduğu sütunun **sağındadır.**
- **En önemlisi bir satırın sıfırdan farklı ilk girdisinin bulunduğu sütundaki diğer girdilerin hepsi sıfırdır.**

$$E=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[2S3+S2\text{->}S2]{} F=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow[-2S2+S1\text{->}S1]{} G=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Satırca İndirgenmiş Matris Uygulaması



3 x 3 Matris



10 x 10 Matris

Teşekkürler.

Dersin Sonu

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr