Bilgisayar Mühendisliğinde Matematik Uygulamaları

2. Hafta

Yrd. Doç. Dr. A. Burak İNNER

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr

VEKTÖR UZAYLARI

Vektör Uzayları (Vector Spaces)

Boş olmayan bir V kümesi verilmiş olsun. V kümesinde $\forall (x,y) \in VxV$ için $T(x,y) = x + y$ ile tanımlı $T: VxV \to V$ fonksiyonu (toplama işlemi) ve R gerçel sayılar cismi olmak üzere, $\forall(r,x) \in RxV$ için $S(r, x) = rx$ ile tanımlı $S: RxV \to V$ fonksiyonu (skalerle çarpma işlemi) verilmiş olsun. Aşağıdaki aksiyomlar gerçekleniyorsa V kümesine R gerçel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı ya da gerçel vektör uzayı denir ve V(R) ile gösterilir.

1. (V, +) sistemi değişmeli gruptur.
2.
   a) $\forall r \in R$ ve $\forall x, y \in V$ için $r(x + y) = rx + ry$
   b) $\forall r, s \in R$ ve $\forall x \in V$ için $(r + s)x = rx + sx$
   c) $\forall r, s \in R$ ve $\forall x \in V$ için $r(sx) = (rs)x$
   d) $1 \in R$ ve $\forall x \in V$ için $1x = x$ dir.

V(R) vektör uzayında V kümesinin elemanlarına vektör, R kümesinin elemanlarına da skaler denir.

VEKTÖR UZAYLARI

UYARI–1: Yukarıdaki vektör uzayı tanımında gerçel sayı cismi yerine, karmaşık sayı cismi de alınabilir. Böylece elde edilen vektör uzayına **karmaşık vektör uzayı** denir. Bu bölümde gerçel vektör uzaylarından başka vektör uzaylarını incelemeyeceğimiz için **gerçel vektör uzayı** ifadesi yerine **vektör uzayı** ifadesini kullanacağız.

UYARI–2: $R^n = RxRx\cdots xR = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n): x_1, x_2, \cdots x_n \in R\}$ kümesi,

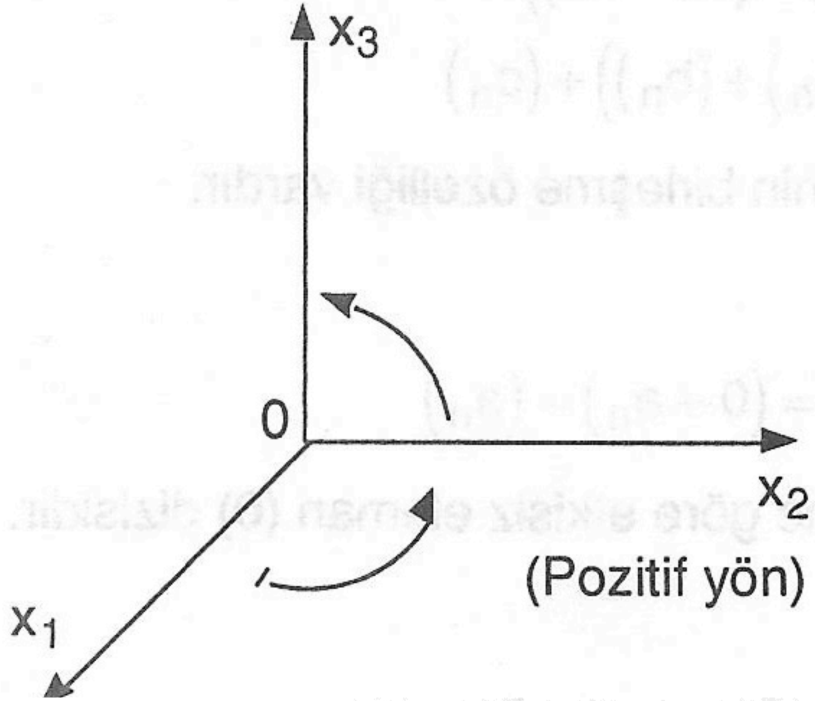
i) $(x_1, x_2, \cdots, x_n) + (y_1, y_2, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$ toplama

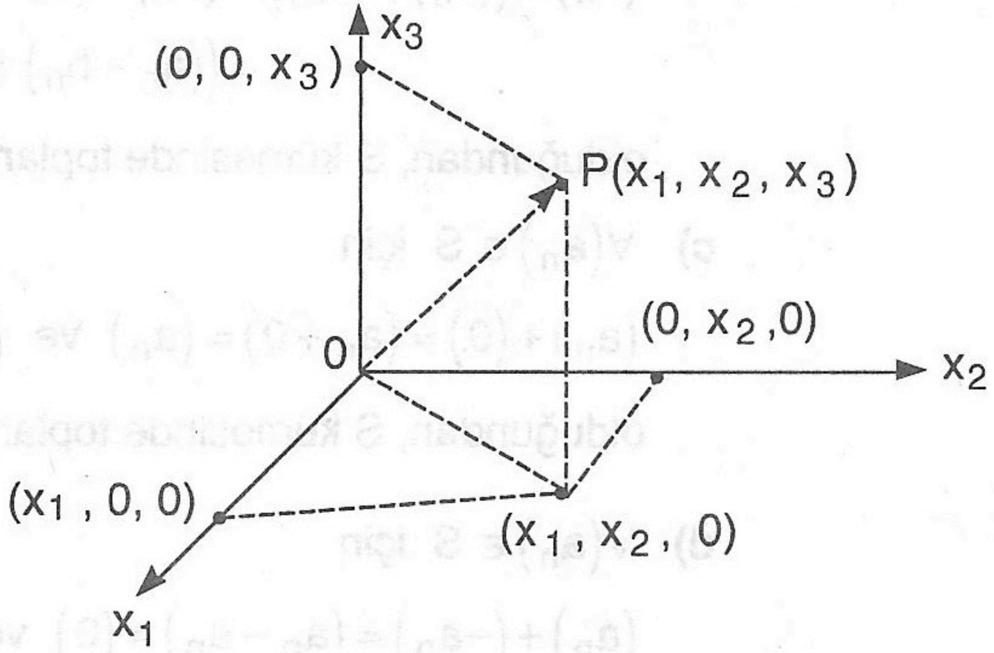
ii) $r \cdot (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (rx_1, rx_2, \cdots, rx_n)$ skalerle çarpma

işlemlerine göre R de bir vektör uzayıdır. Özel olarak R^2 ile düzlem, R^3 ile üç boyutlu uzay gösterilir. Bu nedenle düzlemdeki bir vektör (x_1, x_2), üç boyutlu uzaydaki bir vektör (x_1, x_2, x_3) olarak alınır.

VEKTÖR UZAYLARI

- Dik koordinat sisteminde (x_1, x_2, x_3) vektörünün yazımı;





$(x_1,0,0)$ noktasından $(0x_2,0x_3)$ düzlemine paralel bir düzlem, $(0,x_2,0)$ noktasından $(0x_1,0x_3)$ düzlemine paralel bir düzlem, $(0,0,x_3)$ noktasından $(0x_1,0x_2)$ düzlemine paralel bir düzlem çizilir. Bu üç düzlemin arakesiti (x_1,x_2,x_3) üçlüsüne karşılık gelen noktadır. Bundan böyle $(\mathbf{x_1,x_2,x_3})$ **üçlüsüne karşılık gelen nokta** yerine kısaca $(\mathbf{x_1,x_2,x_3})$ **noktası** diyeceğiz.

VEKTÖR UZAYLARI

- Alt vektör uzayı (Subvector spaces):

V bir vektör uzayı ve $A \subset V$, $A \neq \varnothing$ olsun. A kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı ise yani;

$\forall x,y \in A$ ve $\forall r \in R$ içn

i) $x + y \in A$

ii) $rx \in A$ oluyorsa A ya, V nin bir altuzayı denir.

VEKTÖR UZAYLARI

- **Örnek:** $A = \{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in R^2 \wedge x_1 - 3x_2 = 0\}$ kümesinin **R^2 nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.**

VEKTÖR UZAYLARI

- Çözüm:

1) $(x_1,x_2)\in A \Rightarrow \quad x_1-3x_2=0$

$(y_1,y_2)\in A \Rightarrow + \quad y_1-3y_2=0$

$$\overline{\qquad (x_1+y_1)-3(x_2+y_2)=0 \qquad}$$

$$\Rightarrow (x_1+y_1,\ x_2+y_2)\in A$$

$$\Rightarrow (x_1,x_2)+(y_1,y_2)\in A \quad \text{olduğundan}$$

A kümesi toplama işlemine göre kapalıdır.

2) $(x_1, x_2) \in A \quad \Rightarrow x_1 - 3x_2 = 0$

$$\Rightarrow k(x_1 - 3x_2) = 0$$

$$\Rightarrow kx_1 - 3kx_2 = 0$$

$$\Rightarrow (k \cdot x_1, kx_2) \in A$$

$\Rightarrow k(x_1, x_2) \in A$ olduğundan

A kümesi skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır. A kümesi R^2 nin bir alt uzayıdır.

VEKTÖR UZAYLARI

Vektörlerin doğrusal (lineer) birleşimi:

V bir vektör uzayı, $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n \in V$ ve

$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n \in R$ olmak üzere,

$r_1V_1 + r_2V_2 + r_3V_3 + \ldots + r_nV_n \in V$ vektörüne $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ vektörlerinin **doğrusal (lineer) bileşimi** denir.

Örnek: **(2, –3) ve (–1, 4) vektörlerinin tüm doğrusal bileşimlerini yazınız.**

Çözüm: $r_1, r_2 \in R$ olmak üzere bu iki vektörün tüm doğrusal bileşimleri

$$r_1(2,-3)+r_2(-1,4)=(2r_1,-3r_1)+(-r_2,4r_2)$$

$$=(2r_1-r_2,-3r_1+4r_2) \text{ vektörüdür.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: (5, –7) vektörünü, (–2, 1) ve (–1, 5) vektörlerinin doğrusal bileşimi olarak yazınız.

Çözüm:

$$r_1(-2,1)+r_2(-1,5)=(5,-7)$$

$$(-2r_1,r_1)+(-r_2,5r_2)=(5,-7)$$

$$(-2r_1-r_2,\ r_1+5r_2)=(5,-7)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} -2r_1-r_2&=5\\ r_1+5r_2&=-7\end{aligned}\right\}$$ sisteminden $$\begin{aligned} r_1&=-2\\ r_2&=-1\end{aligned}$$ bulunur. Buradan

$$(5,-7)=-2(-2,1)-(-1,5)$$ yazılır.

VEKTÖR UZAYLARI

UYARI !!!

$e_1 = i = (1, 0)$, $e_2 = j = (0, 1)$ vektörleri R^2 de

$e_1 = i = (1, 0, 0)$, $e_2 = j = (0, 1, 0)$, $e_3 = k = (0, 0, 1)$ vektörleri R^3 de birim vektörleri gösterir.

R^2 deki her (x_1, x_2) vektörü $(x_1, x_2) = x_1 e_1 + x_2 e_2$

$$(x_1, x_2) = x_1 i + x_2 j$$

R^3 deki her (x_1, x_2, x_3) vektörü $(x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 i + x_2 j + x_3 k$$

biçiminde birim vektörlerin doğrusal bileşimi olarak yazılır.

VEKTÖR UZAYLARI

- Vektör uzayının üreteci:

V bir vektör uzayı ve $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n \in V$ olsun.

$v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$ vektörlerinin doğrusal bileşimlerinin oluşturduğu

$U = \{r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 + \cdots + r_nv_n : r_1, r_2, r_3, \cdots, r_n \in R\}$ kümesine v_1, v_2, $v_3 \ldots$, v_n vektörlerinin ürettiği (gerdiği) küme, $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ kümesine de U kümesinin üreteci denir. U, V nin bir alt uzayıdır.

VEKTÖR UZAYLARI

- Vektörlerin doğrusal bağımlı veya bağımsızlığı (linear dependent-linear independence):

V bir vektör uzayı ve $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ olsun

i) $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ sayılarından en az biri sıfırdan farklı olmak üzere,

$r_1v_1 + r_2v_2 + \ldots + r_nv_n = 0$ koşulu sağlanıyorsa $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **vektörleri doğrusal bağımlıdır** denir.

ii) $r_1v_1 + r_2v_2 + \ldots + r_nv_n = 0$ eşitliği yalnız $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ için sağlanıyorsa $v_1, v_2, \ldots, v_n$ **vektörleri doğrusal bağımsızdır** denir.

VEKTÖR UZAYLARI

UYARI !!!

- R^n ‘ de alınan n tane vektörün bileşenlerinin alt alta yazılmasıyla elde edilen n boyutlu determinantın değeri sıfır ise vektörler lineer bağımlı, sıfırdan farklı ise lineer bağımsızdır.
- Lineer bağımsız vektörler uzayı gerer iken lineer bağımlı vektörler uzayı germezler
- n boyutlu uzayda (n+1) tane vektör daima lineer bağımlıdır.

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: R^2 de (3, – 4) ve (2, 5) vektörleri **doğrusal bağımlı mıdır?**

Çözüm: i) $r_1, r_2 \in R$ ve $(0,0) \in R^2$ olmak üzere,

$$r_1(3,-4)+r_2(2,5)=(0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3r_1+2r_2=0 \\ -4r_1+5r_2=0 \end{array}\right\}$$ sisteminden $r_1=r_2=0$ bulunur ki vektör doğrusal bağımsızdır .

ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15+8=23 \neq 0$ olduğundan doğrusal bağımsızdır .

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: R^2 de (1, 3) ve (5, 15) vektörleri **doğrusal bağımlı mıdır?**

Çözüm: Vektörlerin bileşenlerinin oluşturduğu determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 15 - 15 = 0$$ olduğundan vektörler doğrusal bağımlıdırlar.

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: $(1, a-1, 0), (b+3, -2, 4), (-3, b, 0)$ vektörlerinin R^3 de doğrusal bağımlı olmaları için **a ile b arasındaki bağıntı nedir?**

Çözüm:

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 0 \\ b+3 & -2 & 4 \\ -3 & b & 0 \end{vmatrix} = 0$$ determinantını 3. sütuna göre açalım.

$$-4\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -3 & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ -3 & b \end{vmatrix} = 0$$

$b + 3a - 3 = 0$ dan $3a + b = 3$ bulunur.

VEKTÖR UZAYLARI

Vektör uzayının tabanı ve boyutu (vector base-vector size):

V vektör uzayındaki $v_1, v_2, \ldots, v_n$ vektörleri V yi geriyor ve doğrusal bağımsız iseler

$\{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$ kümesine **V nin tabanı** ve n sayısına da **V nin boyutu** denir.

$\{e_1, e_2\}$ kümesi R^2 nin, $\{e_1, e_2, e_3\}$ kümesi R^3 ün birer tabanıdır. Bu tabanlara R^2 ve R^3 ün **temel tabanı** denir.

VEKTÖR UZAYLARI

UYARI !!!

1) R^n'de lineer bağımsız n tane vektör daima uzayı gerer. Bu nedenle R^n 'de lineer bağımsız n tane vektörün kümesi bu uzayın bir tabanıdır.

2) Bir uzayın birden fazla tabanı olabilir ancak boyut kesinlikle tek bir reel sayıdır. boy(R^n)=n dir.

3)Vektör sayısı boyut sayısından fazla ise vektörler lineer bağımlıdır.

VEKTÖR UZAYLARI

LİNEER DÖNÜŞÜMLER (LINEAR TRANSFORMATION)

V_1, V_2 birer vektör uzayı ve $f: V_1 \to V_2$ bir fonksiyon olsun.

i) $\forall x,y \in V_1$ için $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii) $\forall r \in R$ ve $\forall x \in V_1$ için $f(rx) = rf(x)$ koşulları sağlanıyorsa f ye V_1 den V_2 ye bir doğrusal dönüşüm denir.

Örnek: $f: R^2 \to R^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1, 4x_2)$ bir doğrusal dönüşüm müdür?

VEKTÖR UZAYLARI

Çözüm:

i) $x=(x_1,x_2)\in R^2 \wedge y=(y_1,y_2)\in R^2$ için

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= f(x_1+y_1, x_2+y_2)\\
&= (2(x_1+y_1), 4(x_2+y_2))\\
&= (2x_1+2y_1, 4x_2+4y_2)\\
&= (2x_1+4x_2)+(2y_1+4y_2)\\
&= f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2)\\
&= f(x)+f(y)
\end{aligned}
$$

ii) $f(rx)=f(rx_1,rx_2)=(2rx_1,4rx_2)=r(2x_1,4x_2)$

$=rf(x_1,x_2)=rf(x)$ olduğundan f doğrusal dönüşümdür.

VEKTÖR UZAYLARI

LİNEER DÖNÜŞÜMLERİN MATRİS GÖSTERİMİ

$f : R^n \to R^m$ doğrusal dönüşümünde $x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in R^n$ olmak üzere $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$ vektörünün f doğrusal dönüşümü altında görüntüsü

$$f(x) = x_1 \cdot f(e_1) + x_2 \cdot f(e_2) + \cdots + x_n \cdot f(e_n) \text{ dir.}$$

$$f(e_1) = f(1,0,0,\cdots,0) = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1})$$

$$f(e_2) = f(0,1,0,\cdots,0) = (a_{12}, a_{22}, \cdots a_{m2})$$

$$\vdots$$

$$f(e_n) = f(0,0,0\cdots 1) = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{mn}) \text{ olsun}$$

$f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)$ vektörlerini sütun vektörleri olarak alalım ve f (x) i yeniden yazalım.

VEKTÖR UZAYLARI

$$f(x) = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

olur ki buradaki

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisine **f doğrusal dönüşümünün matrisi** denir.

VEKTÖR UZAYLARI

UYARI !!!

R^n den R^m ye tanımlı f lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $m \times n$ boyutundadır.

Örnek: $f : R^2 \to R^3$

$f(x_1, x_2) = (x_1 - 3x_2, -4x_2, -2x_1 + x_2)$ dönüşümüne **karşılık gelen matrisi yazınız.**

Çözüm: f dönüşümünün matrisi 3x2 türündedir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

VEKTÖR UZAYLARI

1.Öteleme Dönüşümü:

f:$R^2 \rightarrow R^2$, f(x,y)=(x+a,y+b) lineer dönüşümüne öteleme denir. Yani (x,y) vektörünün (a,b) vektörü kadar ötelenmesidir. Öteleme dönüşümü uzunlukları, açıları ve alanları değiştirmez.

Örnek: (2,-7) vektörünün (1,3) vektörü kadar ötelenmesi sonucu oluşan vektörü yazın.

Çözüm: Tanıma göre ötelenmiş hali;

(2+1,-7+3)=(3,-4) dir.

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: $f: R^2 \rightarrow R^2$, $f(x, y) = (x + 2, y - 3)$ ötelemesinin **tersini bulunuz.**

Çözüm: $x + 2 = X$, $y - 3 = Y$ den $x = X - 2$, $y = Y + 3$ olur.

$f^{-1}(X, Y) = (X - 2, Y + 3)$ bulunur.

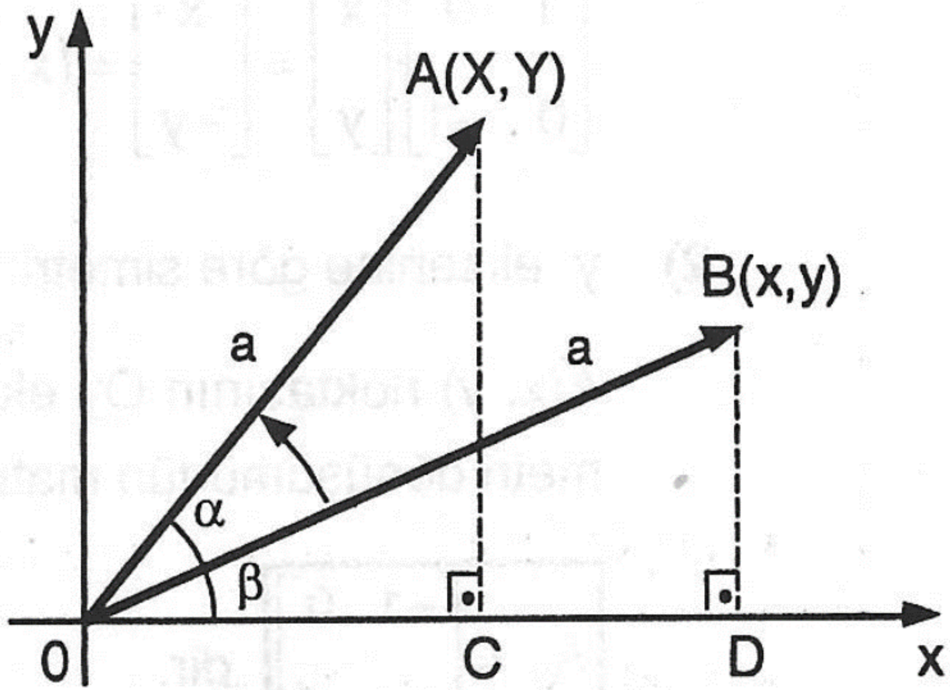
Örnek: $f(x, y) = (x - 2, y + 3)$, $g(x, y) = (x + 1, y + 2)$ ötemeleri için **fof ve fog ötelemelerini bulunuz.**

Çözüm: $(fof)(x, y) = f[f(x, y)] = f(x - 2, y + 3) = (x - 2 - 2, y + 3 + 3) = (x - 4, y + 6)$

$(fog)(x, y) = f[g(x, y)] = f(x + 1, y + 2) = (x + 1 - 2, y + 2 + 3) = (x - 1, y + 5)$ bulunur.

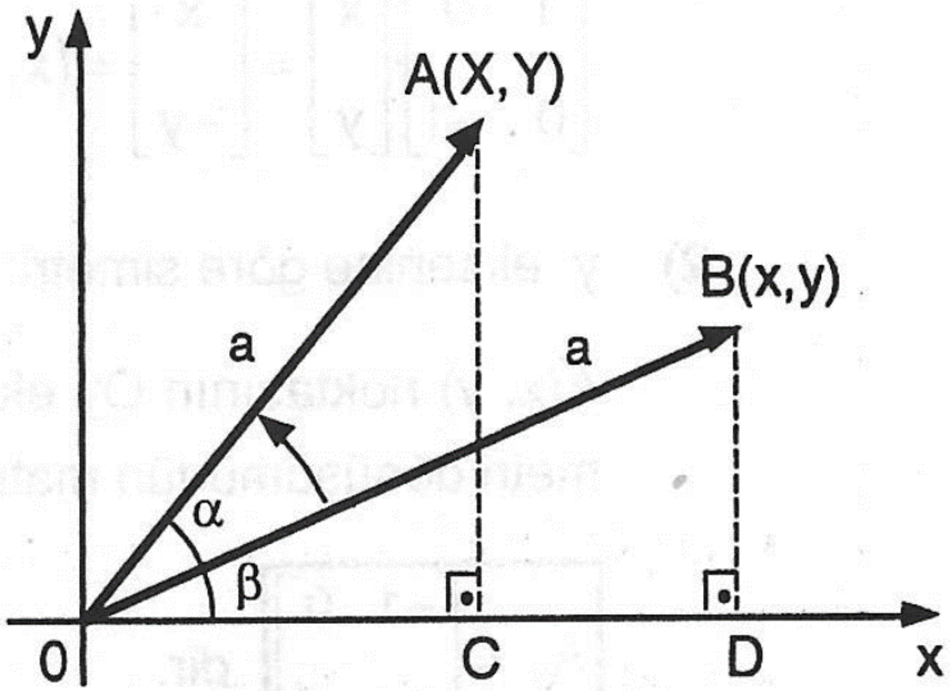
2. Dönme Dönüşümü:

$K' = A \cdot K$ dönüşümünde $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ve $a^2 + b^2 = 1$ ise bu dönüşüme **dönme dönüşümü** denir.



Dönme açısı $0 \leq \alpha < 2\pi$ olan başlangıç noktası etrafındaki pozitif yöndeki bir dönmede B(x,y)noktasının görüntüsü A(X,Y) ise;

VEKTÖR UZAYLARI



$|OA| = |OB| = a$ olsun

$\widehat{OAC}$ de: $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{|OC|}{a}$

$X = |OC| = a \cdot \cos(\alpha+\beta)$ (1)

$\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{|AC|}{a}$

$Y = |AC| = a \cdot \sin(\alpha+\beta)$ (2) dir.

VEKTÖR UZAYLARI

$X = a\cos\alpha.\cos\beta - a\sin\alpha.\sin\beta$ (1)

$Y = a\sin\alpha.\cos\beta + a\cos\alpha.\sin\beta$ (2) olur.

Öte yandan $\widehat{OBD}$ de: $\cos\beta = \dfrac{|OD|}{a} \quad \wedge \quad \sin\beta = \dfrac{|BD|}{a}$

$x = |OD| = a\cos\beta$ (3) $\qquad y = |BD| = a\sin\beta$ (4) elde edilir.

(3) ve (4) , (1) ve (2) de yerine konulursa,

$$\begin{aligned} X &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ Y &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned} \quad \text{ya da} \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

Buradaki $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ matrisi dönme matrisidir.

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: **Düzlemde $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ radyanlık pozitif yöndeki dönmenin matrisini ve (–2, 4) noktasının görüntüsünü bulunuz.**

Çözüm: Dönme matrisi $= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$ dir.

(–2, 4) noktasının görüntüsü ise

$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}+2 \end{bmatrix}$ veya $\left(-1-2\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\right)$ dür.

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: xy koordinat sistemine P(1,2) veriliyor. Eksenler pozitif yönde 30^0 döndürüldüğünde oluşan yeni x′y′ koordinat sisteminde P noktasının koordinatları nedir?

Çözüm:

$$x' = x.\cos\theta + y.\sin\theta$$
$$y = -x.\sin\theta + y.\cos\theta$$

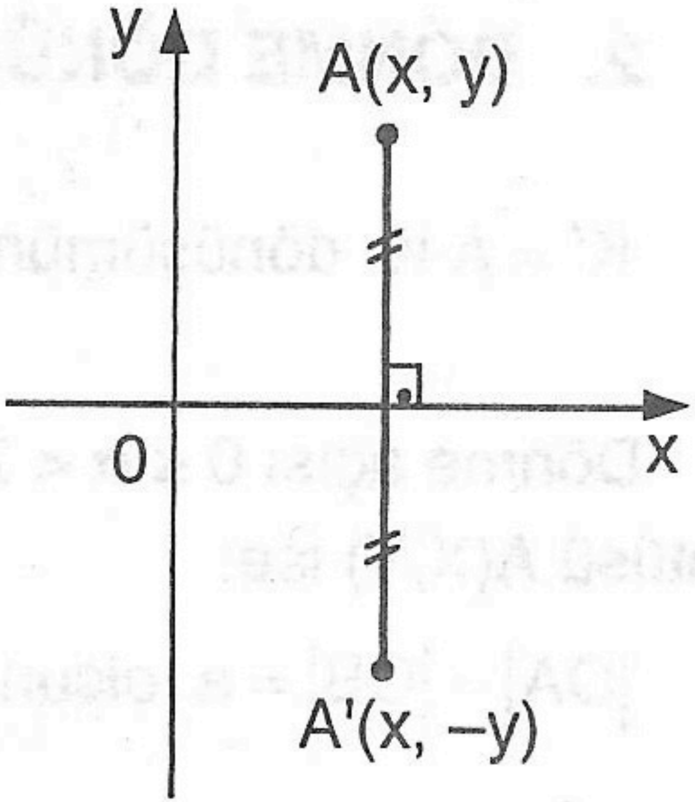
eşitliklerinde $\theta=30^0$ yazıldığında;

$x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$ ve $y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$ olur.

x=1 ve y=2 için; $x' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$ ve $y' = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}$ bulunur.

3. Simetri Dönüşümü:

a) X eksenine göre simetri;



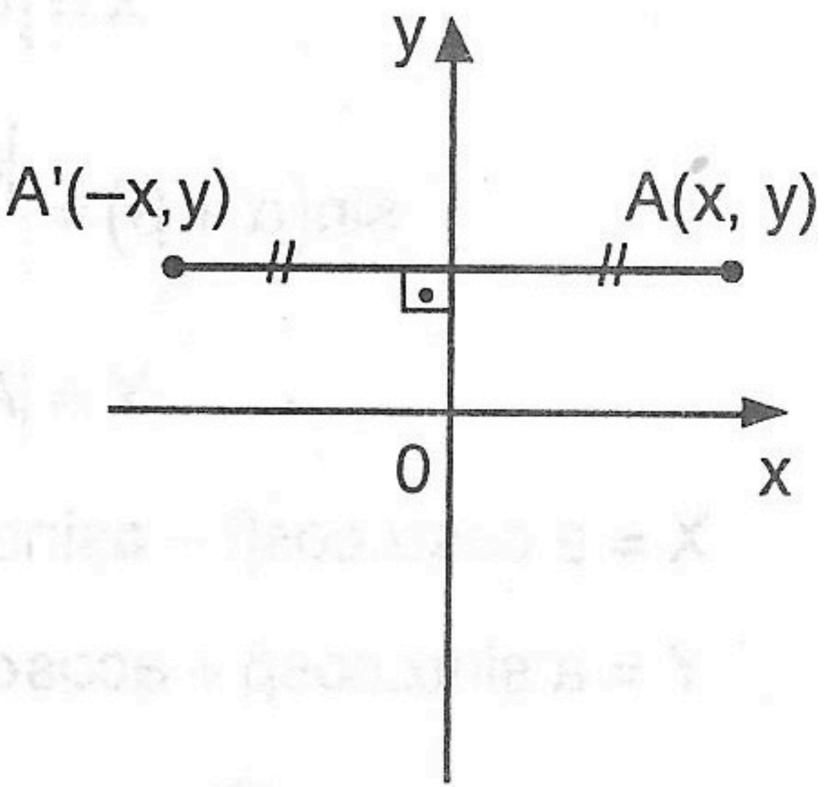
A(x, y) noktasının Ox eksenine göre simetriği A′(x, −y) olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$\boxed{A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$ dir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = (x, -y)$$ olur.

VEKTÖR UZAYLARI

b) Y eksenine göre simetri;

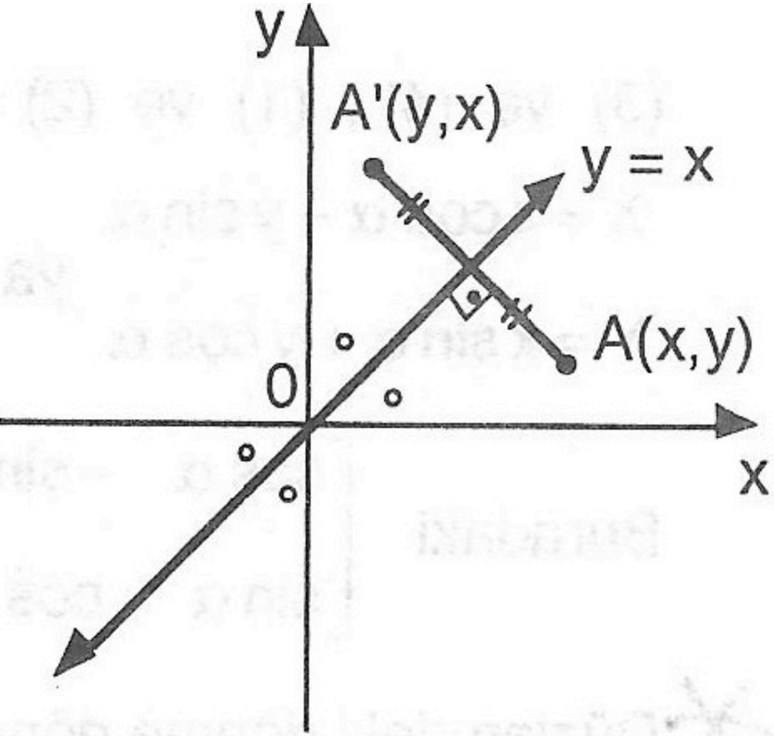


A(x, y) noktasının Oy eksenine göre simetriği A′(–x, y) olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$\boxed{A_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$ dir.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = (-x, y) \text{ olur.}$$

c) y=x doğrusuna göre simetri;

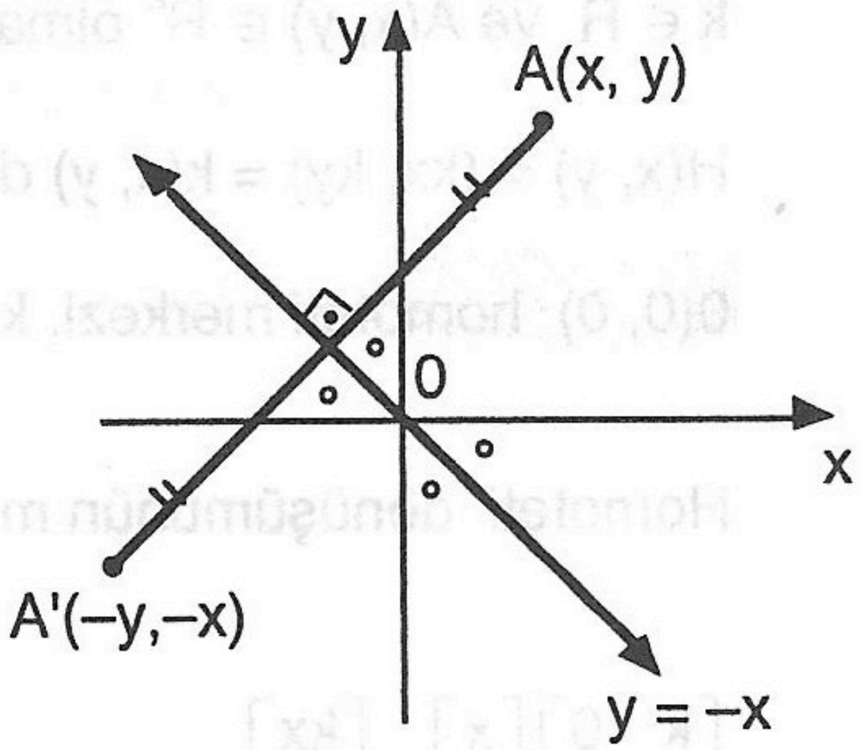


A(x, y) noktasının y = x doğrusuna göre simetriği A′(y, x) olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$\boxed{A_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \text{ dır.}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = (y,x) \text{ olur.}$$

d) $y = -x$ doğrusuna göre simetri;



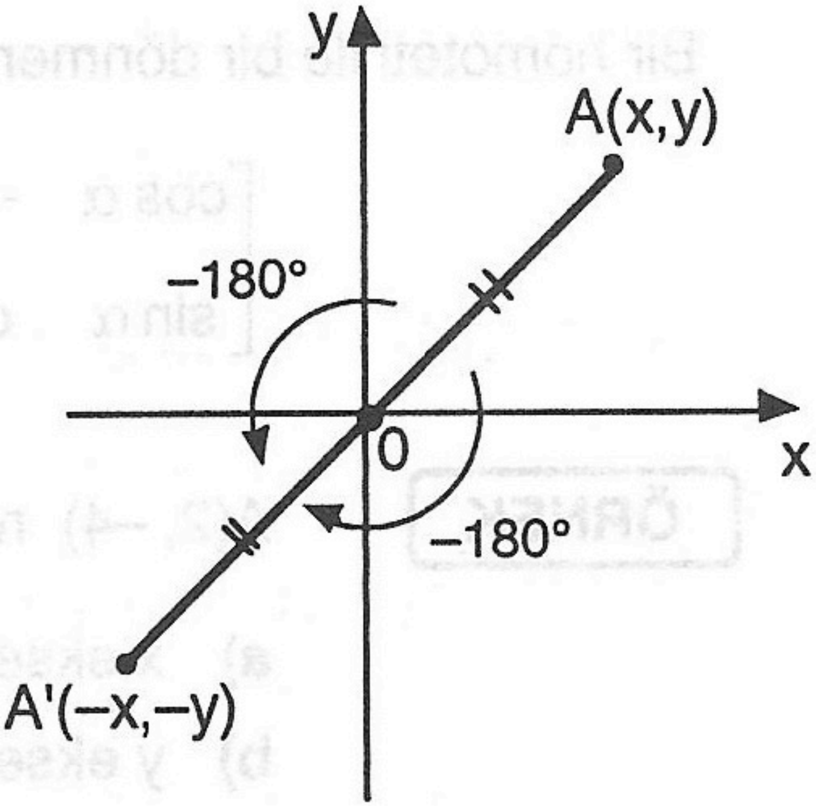
A(x, y) noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $A'(-y, -x)$ olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$\boxed{A_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$$ dır.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix} = (-y, -x)$$ olur.

VEKTÖR UZAYLARI

e) Orijine göre simetri (180^0 ve -180^0 lik dönmeler);



A(x, y) noktasının orijine göre simetriği A'(–x, –y) olup bu simetri dönüşümünün matrisi

$$\boxed{A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}\ \text{dir.}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = (-x, -y) \text{ olur.}$$

4. Homoteti Dönüşümü:

$k \in R$ ve $A(x, y) \in R^2$ olmak üzere,

$H(x, y) = (kx, ky) = k(x, y)$ dönüşümüne **homoteti** denir.

$0(0, 0)$ homoteti merkezi, k sayısı ise homoteti oranıdır.

Homoteti dönüşümünün matrisi $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ dır.

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} = (kx, ky) = k \cdot (x, y)$$ olur.

5.Benzerlik Dönüşümü:

Bir homoteti ile bir dönmenin bileşkesine **benzerlik dönüşümü** denir. Yani benzerlik dönüşümünün matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\cos\alpha & -k\sin\alpha \\ k\sin\alpha & k\cos\alpha \end{bmatrix}$$ dır.

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: A(2, –4) noktasının,

a) x eksenine göre

b) y eksenine göre

c) y = x doğrusuna göre

d) y = –x doğrusuna göre

e) Orijine göre simetriklerini,

f) 90° döndürüldüğünde elde edilen

g) 270° döndürüldüğünde elde edilen noktaları bulunuz.

Çözüm:

a) $A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = (2,4)$

b) $A_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = (-2,-4)$

c) $A_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = (-4,2)$

d) $A_{y=-x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = (4,-2)$

VEKTÖR UZAYLARI

e) $A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = (-2, 4)$

f) $A_{90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = (4,2)$

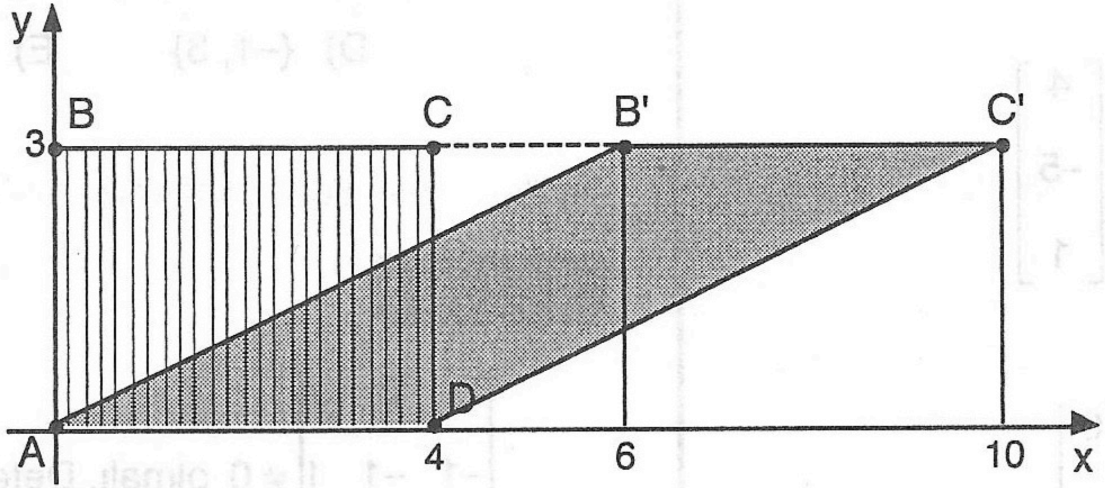
g) $A_{270} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} = (-4, -2)$ bulunur.

VEKTÖR UZAYLARI

Örnek: A(0, 0) , B(0, 3), C(4, 3), D(4, 0) olan dörtgenin $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **dönüşüm matrisi altındaki görüntüsünü bulunuz ve şeklini çiziniz.**

Çözüm: Noktaların tümüne dönüşüm matrisini aynı anda uygulayalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underset{\begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{\begin{matrix} A & B' & C' & D \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 6 & 10 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}}$$



VEKTÖR UZAYLARI

Örnek:

$f: R^2 \to R^2$ doğrusal dönüşümünün matrisi $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ dır. $2x - 3y + 1 = 0$ **doğrusunun bu dönüşüm matrisi altındaki görüntüsü nedir?**

Çözüm:

Doğru üzerindeki her hangi bir (x, y) noktasının dönüşüm matrisindeki görüntüsü $[X, Y]$ olsun.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - y \\ 2x \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Buradan $X = 3x - y$ ve $Y = 2x$ olur.

x ve y değerleri çekilirse

$$x = \frac{Y}{2} \quad \wedge \quad X = \frac{3Y}{2} - y$$

$$y = \frac{3Y - 2X}{2} \text{ bulunur.}$$

Doğru denkleminde yerine konursa,

$$2 \cdot \frac{Y}{2} - 3 \cdot \frac{3Y - 2X}{2} + 1 = 0$$

$2Y - 9Y + 6x + 2 = 0$ dan

$6X - 7Y + 2 = 0$ elde edilir.

Teşekkürler.

Dersin Sonu

Kocaeli Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği
Yapay Zeka ve Benzetim Sistemleri Ar-Ge Lab.
http://yapbenzet.kocaeli.edu.tr